

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. XVII, N. 6

*Serie decima*

16 Settembre 1960

## Sur une méthode simplifiée de calcul pour les processus relativistes en électrodynamique quantique.

P. KESSLER

*Laboratoire de Physique Atomique du Collège de France - Paris*

(ricevuto l'11 Aprile 1960)

**Summary.** - We propose a simplified method of approximate calculation for relativistic processes in quantum electrodynamics. Our starting point is a quantum field theoretical generalization of the semi-classical Williams-Weizsäcker method, which defines an equivalent photon spectrum for a relativistic charged particle. We then show that a formula of the Williams-Weizsäcker type can be set up to express the probability associated with any elementary diagram containing two fermion lines and one photon line, provided that both fermion states are relativistic. The elementary virtual processes represented by these diagrams may thus be considered as « quasi real processes ». Several examples are given, in which this concept is applied to calculate higher order processes by relating them directly to simpler effects. The cases we treat are: 1) bremsstrahlung of a relativistic particle at a given angle; 2) nuclear recoil from pair creation by high-energy photons; 3) inner bremsstrahlung in the disintegration of the  $\mu$ -meson; 4) radiative corrections in the compared  $\beta$ -ray spectra of  $^{12}\text{B}$  and  $^{12}\text{N}$ . In conclusion, further possibilities to extend the method (especially to  $\pi$ -meson theory) are briefly discussed.

### 1. - Introduction.

La méthode de calcul que nous exposons ci-après nous a été inspirée essentiellement par deux considérations:

a) Le fait que les formules obtenues en électrodynamique quantique pour les sections efficaces des phénomènes de différents ordres se simplifient en général grandement lorsque l'on passe au cas extrême-relativiste.

b) Le succès obtenu, particulièrement pendant ces dernières années, par la méthode semi-classique élaborée par WILLIAMS et von WEIZSÄCKER vers 1933-35. On sait que cette méthode (fondée sur l'emploi d'un spectre équivalent de photons pour une particule chargée rapide) a permis d'interpréter de façon satisfaisante les résultats expérimentaux concernant les interactions nucléaires des mésons  $\mu$  du rayonnement cosmique, et aussi certains effets nucléaires obtenus avec les électrons de haute énergie produits par des accélérateurs.

Nous en avons conclu qu'il devait être possible de développer une méthode assez générale visant à simplifier les calculs dans un grand nombre de problèmes où interviennent des particules relativistes.

Notre point de départ est une reformulation de la méthode de Williams et Weizsäcker, permettant de fonder celle-ci sur une base conforme à la théorie quantique des champs et d'aboutir à une formule d'une validité plus générale.

Nous allons montrer que le même type de formule se prête en fait à une utilisation beaucoup plus large que celle prévue par la méthode originelle. Le cas d'un spectre de photons virtuels devient ainsi un cas particulier, parmi de nombreux autres cas de l'électrodynamique que la nouvelle méthode permet de traiter.

Nous donnerons quelques applications où notre procédé a pour effet de simplifier la solution de divers problèmes d'un intérêt actuel. En conclusion, nous discuterons des possibilités de généralisation ultérieure.

## 2. — Généralisation de la méthode de Williams et Weizsäcker.

Le principe de la méthode d'approximation semiclassique de Williams et Weizsäcker <sup>(1,2)</sup> est de décomposer le champ électromagnétique créé par une particule chargée relativiste au voisinage d'une cible en un spectre équivalent de photons. Pour ceci, on suppose réalisées les deux conditions:

$$(1) \quad E \gg m, \quad E \gg k,$$

où  $E$  et  $m$  sont l'énergie et la masse de la particule,  $k$  l'énergie cédée par elle dans l'interaction avec la cible (énergie du photon virtuel échangé). On obtient ainsi la section efficace pour un processus  $A$  dû à l'interaction électromagnétique de la particule, simplement en intégrant sur le spectre équivalent de photons la section efficace pour le processus analogue  $B$  provoqué par des

<sup>(1)</sup> E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc.*, A **139**, 163 (1933); *Phys. Rev.*, **45**, 729 (1934); *Kgl. Dansk. Vid. Selsk.*, **13**, 4 (1935).

<sup>(2)</sup> C. F. VON WEIZSÄCKER: *Zeits. Phys.*, **88**, 612 (1934).

photons libres. Donc :

$$(2) \quad \sigma_A = \int P(k) \sigma_B dk ,$$

où le spectre de photons  $P(k)$  est donné <sup>(3)</sup> par la formule :

$$(3) \quad P(k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{dk}{k} \left( \ln \frac{E}{mkb_{\min}} - 0.4 \right) .$$

Ici,  $\alpha$  est la constante de structure fine;  $b$  est le paramètre d'impact de la particule par rapport à la cible. (Nous prenons  $\hbar = c = 1$ , et nous supposons une charge  $Z = 1$  pour la particule.) Il a été admis couramment que l'on pouvait choisir un paramètre d'impact de l'ordre de la longueur d'onde de Compton de la particule; dans ce cas, la formule devient :

$$(4) \quad P(k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{dk}{k} \left( \ln \frac{E}{k} - 0.4 \right) .$$

Nous avons déjà démontré précédemment <sup>(4)</sup> que l'on obtient une formule tout à fait semblable, avec les mêmes hypothèses, à partir du formalisme de la théorie quantique des champs. Nous allons montrer ici que l'on peut généraliser la formule en renonçant à la seconde hypothèse qui figure dans (1).

Nous nous proposons de comparer, afin d'arriver à une expression du type (2), les diagrammes  $A$  et  $B$  de la Fig. 1, où nous attribuons la même énergie  $k$  ( $= E - E'$ ) au photon libre de  $B$  et au photon virtuel de  $A$ ; le diagramme restant  $M$  est le même dans les deux cas.

La seule condition que nous imposons est que la particule soit relativiste avant et après sa diffusion:  $E, E' \gg m$ .

Nous admettrons dans la suite que la particule est un fermion. On pourrait faire une démonstration analogue pour un boson. Mais il faut remarquer que la méthode concerne surtout les particules dont l'interaction avec la matière est essentiellement électromagnétique, c'est-à-dire les électrons et les mésons  $\mu$ .

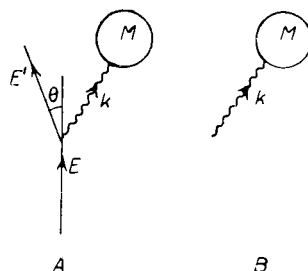


Fig. 1.

<sup>(3)</sup> W. HEITLER: *The Quantum Theory of Radiation*, 3<sup>ème</sup> éd. (Oxford, 1954), p. 414 et suiv.

<sup>(4)</sup> D. KESSLER et P. KESSLER: *Nuovo Cimento*, 4, 601 (1956).

En appliquant les règles de Feynman au calcul des diagrammes  $A$  et  $B$ , nous obtenons:

$$(5) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^4} |\bar{w}' \boldsymbol{\gamma} w \cdot \mathbf{M}|^2,$$

$$(6) \quad \sigma_B = \frac{1}{2k} |\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{M}|^2,$$

où:  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  sont les quadrivecteurs impulsion-énergie pour la particule entrante et sortante;  $w$ ,  $w'$  sont les spineurs de Dirac correspondants, normalisés ici à l'unité;  $\boldsymbol{\epsilon}$  est le quadrivecteur polarisation du photon libre.  $\mathbf{M}$  groupe l'ensemble des facteurs correspondant à la partie non précisée du diagramme  $A$  ou  $B$ ; c'est la même quantité dans les deux cas, à cette seule différence près que (du fait de la conservation de l'impulsion-énergie à chaque vertex)  $\mathbf{M}$  est fonction de l'impulsion-énergie du photon virtuel dans le cas  $A$ , et du photon réel dans le cas  $B$ .

Soit  $\theta$  l'angle de diffusion de la particule. En remplaçant  $d^3p'$  par  $2\pi \sin \theta p'^2 dp'$ , en négligeant les termes d'ordre supérieur en  $m/E$  et  $m'/E'$ , et enfin en posant:  $\varphi = (2E'/k) \sin \theta/2$ , on obtient:

$$(7) \quad \frac{d^3p'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^4} \simeq 2\pi \frac{dE' \sin \theta d\theta}{E^2 (4 \sin^2 \theta/2 + (m^2 k^2 / E^2 E'^2))^2} = 2\pi \frac{E'^2 dk}{E^2 k^2} \frac{\varphi d\varphi}{(\varphi^2 + (m^2/E^2))^2}.$$

On conclut aisément de (7) que les valeurs de  $\varphi$  qui joueront un rôle prédominant dans le spectre seront telles que:  $m/E \ll \varphi \ll 1$ . D'autre part, on remarque également que l'on aura à considérer essentiellement des valeurs faibles pour l'angle  $\theta$ . Dans ces conditions, on voit que  $\varphi$  peut être sensiblement assimilé à l'angle d'émission du photon virtuel par rapport à la direction de la particule incidente.

Notons par ailleurs que si nous appelons  $\mathbf{k}_v (= \mathbf{p} - \mathbf{p}')$  le vecteur impulsion du photon virtuel, on a:

$$(8) \quad \frac{|\mathbf{k}_v|^2 - k^2}{k^2} \simeq \frac{E}{E'} \left( \varphi^2 + \frac{m^2}{E^2} \right).$$

Le second membre est en général négligeable, donc  $|\mathbf{k}_v| \simeq k$ . Autrement dit, le photon virtuel peut être assimilé au photon réel du point de vue de l'impulsion-énergie.

Considérons maintenant le courant de transition  $\mathbf{j} = \bar{w}' \boldsymbol{\gamma} w$ . Nous adopterons un système d'axes orthogonaux  $Oxyz$  où  $Ox$  est défini par la direction du photon virtuel et  $Oy$  est perpendiculaire au plan de diffusion. Nous aurons une expression approchée de  $\mathbf{j}$  en négligeant les termes en  $m/E$ ,  $m'/E'$  et d'autre part

en faisant un développement en série de puissances de  $\varphi$  dont on ne gardera que les termes d'ordre 1. On obtient dans ces conditions:

a) Cas sans retournement de spin:

$$(9) \quad j_x = 1; \quad j_y = 0; \quad j_z = \frac{2E - k}{2E'} \varphi; \quad j_0 = 1.$$

b) Cas avec retournement de spin:

$$(10) \quad j_x = \frac{k}{2E'} \varphi; \quad j_y = i \frac{k}{2E'} \varphi; \quad j_z = 0; \quad j_0 = \frac{k}{2E'} \varphi.$$

Nous poserons dans le cas a):  $\mathbf{j} = ((2E - k)/2E')\varphi\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}$ ; dans le cas b):  $\mathbf{j} = i(k/2E')\varphi\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}$ . En pratiquant sur  $\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}$  la transformation de jauge (voir <sup>(5)</sup>):  $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} - (\epsilon_0/k)\mathbf{k}$ , on obtient:

$$(11) \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} = (0, 0, 1, 0); \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} = (0, 1, 0, 0).$$

Dans les deux cas, on a donc, dans notre approximation, une polarisation transversale (soit parallèle au plan de diffusion, soit perpendiculaire à ce plan) pour le photon virtuel. On est donc en droit de considérer celui-ci comme un photon « presque réel » et de l'assimiler au photon libre.

En sommant les cas a) et b), et en remplaçant  $\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}$  par  $\boldsymbol{\epsilon}$  (identifié avec le quadrivecteur polarisation du photon libre), on a:

$$(12) \quad |\mathbf{j} \cdot \mathbf{M}|^2 = \frac{(2E - k)^2 + k^2}{4E^2} |\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{M}|^2.$$

D'où finalement:

$$(13) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\varphi^3 d\varphi}{(\varphi^2 + m^2/E^2)^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k^2} \frac{(2E - k)^2 + k^2}{4E^2} |\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{M}|^2 = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right) \sigma_B.$$

On a donc bien abouti à une formule du type (2), où le spectre équivalent de photons est défini par:

$$(14) \quad P(k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right).$$

<sup>(5)</sup> S. S. SCHWEBER, H. A. BETHE et F. DE HOFFMANN: *Mesons and Fields*, vol. 1 (Evanston, 1955), p. 184 et suiv.

Ce résultat appelle une série de remarques :

1) Comparée à la formule semi-classique (3) ou (4), la formule (14) a évidemment un caractère plus général. Dans le cas où  $k \ll E$  (cas traité précédemment dans (4)), ces formules deviennent identiques, sauf apparemment en ce qui concerne le facteur logarithmique. Mais en fait, il suffit de considérer qu'il est logique de définir le paramètre d'impact classique  $b$  comme  $(k_{\text{lat}})^{-1}$ , où  $k_{\text{lat}}$  est l'impulsion cédée latéralement par la particule. Donc :

$$(15) \quad b = (k_{\text{lat}})^{-1} \simeq (k\varphi)^{-1}; \quad b_{\text{min}} \simeq (k\varphi_{\text{max}})^{-1},$$

et l'identité entre les formules (3) et (14) pour le cas  $k \ll E$  devient pratiquement complète.

2) Un avantage important de notre méthode, par rapport à la méthode semi-classique, et dans une certaine mesure aussi par rapport à d'autres démonstrations plus modernes aboutissant au même type de formule (par ex., (6,7)), est de mettre en évidence un spectre angulaire, soit pour l'angle d'émission du photon virtuel, soit pour l'angle de diffusion de la particule. Ceci permet de définir une valeur moyenne (sur le spectre) de l'angle de diffusion :

$$(16) \quad \bar{\theta} \simeq \frac{k}{E} \ln^{-1} \frac{E}{m},$$

pour une valeur donnée de  $k$ .

3) Il convient de choisir avec soin les limites  $\varphi_{\text{max}}$ ,  $k_{\text{min}}$ ,  $k_{\text{max}}$  qui dépendent chaque fois du processus envisagé.  $\varphi_{\text{max}}$  ne doit en aucun cas être supérieur à 1.  $k_{\text{min}}$  est donné par le seuil expérimental de l'effet considéré. Quant à  $k_{\text{max}}$ , il faudrait en principe (conformément à notre hypothèse initiale  $E, E' \gg m$ ) le prendre tel que  $E - k_{\text{max}} \gg m$ . Toutefois, l'intégrale sur  $k$  est dans la plupart des cas peu sensible à sa limite supérieure. Pour les interactions nucléaires des électrons et des mésons  $\mu$ , on peut en général prendre  $\varphi_{\text{max}} \simeq 1$ ,  $k_{\text{max}} \simeq E$ .

4) L'approximation essentielle que nous faisons consiste à nous limiter aux petites valeurs de  $\varphi$ , et à ne conserver que les termes de l'ordre le plus bas lorsque nous développons le spectre en série de puissances de  $\varphi$ . De cette manière, nous éliminons les photons « très virtuels » (non assimilables aux photons réels) : à savoir les photons « éloignés de la couche d'énergie » ( $|\mathbf{k}_v| \gg k$ ) et les photons à polarisation longitudinale. On vérifie aisément que la somme des termes que nous avons négligés dans le spectre est de l'ordre de  $\ln^{-1} E/m$

(6) R. B. CURTIS: *Phys. Rev.*, **104**, 211 (1957).

(7) R. H. DALITZ et D. R. YENNIE: *Phys. Rev.*, **105**, 1598 (1957).

par rapport au terme conservé. On peut en conclure que l'erreur relative sur la section efficace  $\sigma_A$  est également en général de cet ordre (en supposant  $\sigma_B$  connu exactement). L'erreur est évidemment d'autant plus faible que la particule est plus relativiste. En tout cas, la méthode est presque toujours satisfaisante lorsque l'on se contente d'un ordre de grandeur (notamment, lorsqu'il s'agit de vérifier théoriquement des résultats concernant les interactions de particules du rayonnement cosmique).

Notons que la méthode peut perdre sa validité dans certains cas particuliers (mis à part le fait qu'elle est inapplicable pour tout processus élastique, faute d'un processus équivalent impliquant des photons libres). Ces cas particuliers sont les suivants: *a)* On sélectionne les grands angles de diffusion. *b)* On considère un processus pour lequel les photons « très virtuels » possèdent une efficacité très supérieure à celle des photons « presque réels » qui forment la majeure partie du spectre.

Ces réserves faites, il faut souligner que notre procédé ne constitue rien d'autre qu'une approximation de petits angles, et non une approximation dipolaire comme certains auteurs l'ont affirmé erronément <sup>(8)</sup>.

### 3. — La méthode des processus quasi réels.

On peut considérer que la formule de Williams et Weizsäcker donne la probabilité d'un certain processus virtuel élémentaire traité comme un processus « quasi réel »: à savoir l'émission d'un photon virtuel par une particule chargée relativiste.

Il est possible de généraliser ce concept de processus quasi réel, et de l'étendre à tous les processus virtuels élémentaires comportant un photon et deux états de fermion (relativiste).

3.1. *Émission d'un photon par un fermion relativiste.* — Considérons le diagramme élémentaire représenté par la Fig. 2. Nous supposons qu'il est rattaché à un certain diagramme de Feynman complet; pour plus de simplicité nous admettons que le branchement se fait par une seule des trois lignes de la Fig. 2. A ces trois possibilités de branchement correspondent les trois cas:

- 1) Le photon est virtuel; le fermion entrant et le fermion sortant sont réels.
- 2) Le fermion sortant seul est virtuel.
- 3) Le fermion entrant seul est virtuel.

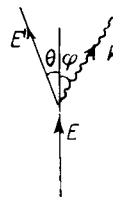


Fig. 2.

<sup>(8)</sup> G. N. FOWLER et A. W. WOLFENDALE: *Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics*, vol. 4 (Amsterdam, 1958), p. 170 et suiv.

Nous allons montrer que dans les trois cas (à la condition d'avoir chaque fois  $E, E' \gg m$ ), la Fig. 2 représente un processus quasi réel, auquel nous pouvons attribuer la probabilité:

$$(17) \quad P(E, k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} q_{\max} - \frac{1}{2} \right) \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right).$$

La précision de cette formule est, bien entendu, d'autant meilleure que la particule est plus relativiste.

Si nous appelons  $A$  le diagramme de Feynman complet considéré,  $B$  le même diagramme amputé de la Fig. 2, les sections efficaces correspondantes  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  seront reliées par l'une ou l'autre des deux formules:

$$(18) \quad \sigma_A = \int P(E, k) \sigma_B dk,$$

$$(19) \quad \sigma_A = \int P(E, k) \frac{d\sigma_B}{dE} dE dk,$$

suivant que  $E$  est une quantité fixe ou variable.

Étudions successivement les trois cas:

1) Le photon est virtuel. C'est le cas que nous avons traité dans la Section 2. La formule (17) est identique à la formule de Williams et Weizsäcker généralisée (14).

2) Le fermion sortant est virtuel. Nous avons à comparer les sections efficaces correspondant aux deux diagrammes  $A$  et  $B$  de la Fig. 3. L'application des règles de Feynman nous donne:

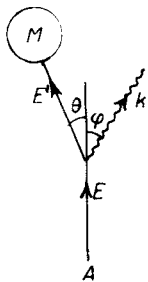


Fig. 3.

$$(20) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d^3k}{k(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)^2} |M(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})w|^2,$$

$$(21) \quad \sigma_B = |Mw'|^2.$$

Les notations employées ci-dessus sont les mêmes que dans la Section 2, à ceci près que la quantité  $M$  (correspondant à la partie non précisée de  $A$  ou  $B$ ) est ici un spineur adjoint.

En effectuant le calcul de  $\sigma_A$ , nous avons:

$$(22) \quad \frac{d^3k}{k(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)^2} \simeq 2\pi \frac{dk}{kE^2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(4 \sin^2 \varphi/2 + m^2/E^2)^2} \simeq 2\pi \frac{dk}{kE^2} \frac{\varphi d\varphi}{(\varphi^2 + m^2/E^2)^2}.$$

Ici encore, comme dans le cas du photon virtuel, on a à considérer des valeurs de l'angle d'émission  $\varphi$  qui sont essentiellement telles que  $m/E \leq \varphi \ll 1$ .



Si nous appelons  $\mathbf{p}' (= \mathbf{p} - \mathbf{k})$  le vecteur impulsion du fermion sortant virtuel, nous avons:

$$(23) \quad \frac{p_s'^2 - E'^2}{E'^2} \simeq \frac{kE}{E'^2} \left( q^2 - \frac{E' m^2}{kE^2} \right),$$

où le second membre est généralement négligeable. Donc  $|\mathbf{p}'_s| \simeq E'$ , et le fermion virtuel du diagramme  $A$  peut être assimilé au fermion réel de  $B$  du point de vue de l'énergie-impulsion.

Si maintenant nous considérons le facteur  $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})u$  qui figure dans l'élément de matrice de  $A$ , nous pouvons obtenir une expression approchée de cette quantité en arrêtant au premier ordre son développement en série de puissances de  $q$ , et en négligeant les termes en  $m/E$ ,  $m/E'$ . On obtient ainsi, suivant les deux possibilités de polarisation du photon:

a)  $\boldsymbol{\epsilon}$  parallèle au plan de diffusion,

$$(24) \quad (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})u_s \simeq (2E - k)q w_s',$$

b)  $\boldsymbol{\epsilon}$  perpendiculaire au plan de diffusion,

$$(25) \quad (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma} - m)(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})u_s \simeq ikq w_s'.$$

Nous utilisons ci-dessus les indices  $s, s'$  pour désigner les deux orientations possibles du spin du fermion. On remarque que, comme dans le cas du photon virtuel, la polarisation parallèle au plan de diffusion correspond au non-retournement du spin du fermion, la polarisation perpendiculaire au retournement du spin.

De toute façon, le fermion virtuel se représente (dans notre approximation) par le même spineur de Dirac que le fermion libre du diagramme  $B$ , auquel il peut donc être complètement assimilé.

Dans ces conditions, on trouve, en sommant le carré de l'élément de matrice de  $A$  sur les états de polarisation du photon:

$$(26) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{q_{\max}} \frac{q^3 dq}{(q^2 - m^2/E^2)^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left( \frac{(2E - k)^2 + k^2}{E^2} \right) M w'^2 =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} q_{\max} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right) \sigma_B,$$

en conformité avec les formules (17), (18).

3) Le fermion entrant est virtuel. Nous comparons les sections efficaces des processus  $A$  et  $B$  représentés sur la Fig 4 :

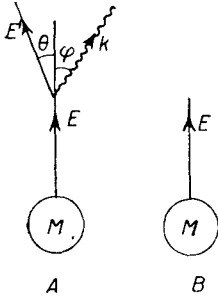


Fig. 4.

$$(27) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p' d^3 k}{k(\mathbf{p}'^2 + \mathbf{k}^2 - m^2)^2} |\bar{w}'(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)M|^2,$$

$$(28) \quad \sigma_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p |wM|^2.$$

Les notations employées sont les mêmes que précédemment, la quantité  $M$  (partie non précisée de  $A$  ou  $B$ ) étant ici un spineur.

On obtient, avec les approximations déjà utilisées dans les deux autres cas (à savoir, essentiellement:  $\varphi$  petit).

$$(29) \quad \frac{d^3 k}{k(\mathbf{p}'^2 + \mathbf{k}^2 - m^2)^2} \simeq 2\pi \frac{dk}{k} \frac{E'^2}{E^4} \frac{\varphi d\varphi}{(\varphi^2 + m^2/E^2)^2},$$

et d'autre part:

$$(30) \quad w'_s(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m) \simeq \begin{cases} \frac{E}{E'} (2E - k) \varphi \bar{w}_s & \text{pour } \boldsymbol{\epsilon} \parallel \text{ au plan} \\ i \frac{E}{E'} k \varphi \bar{w}_s & \text{pour } \boldsymbol{\epsilon} \perp \text{ au plan.} \end{cases}$$

Ici encore, le fermion virtuel de  $A$  est complètement assimilable au fermion réel de  $B$ , à la fois du point de vue de son énergie-impulsion et de sa représentation.

On a finalement (en remplaçant dans  $\sigma_A$  les variables d'intégrations  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}'$ , par  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$ ):

$$(31) \quad \sigma_A = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} \int d^3 p |wM|^2 \int \frac{\varphi^3 d\varphi}{(\varphi^2 + m^2/E^2)^2} \int \frac{dk}{k} \frac{(2E - k)^2 + k^2}{E^2};$$

d'où l'on obtient l'une ou l'autre des formules ci-dessous, suivant que  $E$  est constante ou variable dans le processus  $B$  considéré:

$$(32) \quad \sigma_A = \sigma_B \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right),$$

$$(33) \quad \sigma_A = \frac{2\alpha}{\pi} \int \frac{d\sigma_B}{dE} dE \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right).$$

Le résultat est conforme à (17), (18), (19).

3'2. *Création d'une paire de fermions relativistes par un photon.* — Par symétrie par rapport à l'axe des temps, on peut immédiatement passer du cas de l'émission d'un photon, que nous venons de traiter, à celui de l'absorption d'un photon par un fermion relativiste (Fig. 5). Dans ce cas, la formule (17) définit la probabilité pour qu'un fermion d'énergie finale  $E$  donnée ait subi une diffusion en absorbant un photon d'énergie  $k$  (toujours sous la condition  $E, E' \gg m$ ).

Si l'on considère comme fixe l'énergie du photon absorbé, et non l'énergie initiale ou finale de la particule, on montre facilement que la probabilité du processus élémentaire de la Fig. 5 s'obtient alors en multipliant simplement le second membre de (17) par le facteur  $E^2 dE (k^2 dk)^{-1}$ . On a ainsi:

$$(34) \quad P(k, E) dE = \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \frac{[E^2 + (E - k)^2] dE}{k^3}$$

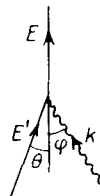


Fig. 5.

Dès lors, on passe au cas de la production d'une paire fermion-antifermion par un photon d'énergie  $k$  donnée, en traitant l'antifermion créé comme un fermion d'énergie négative absorbé. On a aussitôt la formule:

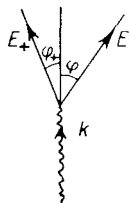


Fig. 6.

$$(35) \quad P(k, E) dE = \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{\max} - \frac{1}{2} \right) \frac{[E^2 + (k - E)^2] dE}{k^3}$$

qui donne la probabilité du processus élémentaire quasi réel représenté par la Fig. 6, à condition que la paire créée soit relativiste ( $E, E_+ \gg m$ ). Cette formule est, bien entendu, pareillement valable pour les trois possibilités de

branchement de la Fig. 6, autrement dit pour les trois cas: photon virtuel, fermion virtuel, antifermion virtuel.

#### 4. — Applications.

Nous ne nous étendons pas ici sur les applications, maintenant nombreuses et bien connues, de la méthode de Williams et Weiszäcker proprement dite. Citons simplement parmi les plus importantes:

a) Le calcul des sections efficaces relatives aux étoiles et gerbes pénétrantes dues aux interactions nucléaires des mésons  $\mu$  très énergétiques du rayonnement cosmique sous terre (voir notamment <sup>(9,10,11)</sup>).

<sup>(9)</sup> E. P. GEORGE et J. EVANS: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 1248 (1950); A **64**, 193 (1951); A **68**, 829 (1955).

<sup>(10)</sup> D. KESSLER et R. MAZE: *Nuovo Cimento*, **5**, 1540 (1957).

<sup>(11)</sup> I. B. MCDIARMID: *Phys. Rev.*, **109**, 1792 (1958).

b) La comparaison entre l'électroproduction et la photoproduction de neutrons, dans une expérience faite à Stanford par BROWN et WILSON<sup>(12)</sup>.

c) La comparaison entre l'électroproduction et la photoproduction de mésons  $\mu$ , dans les expériences réalisées également à Stanford par PANOFSKY et ses collaborateurs<sup>(13)</sup>.

Nous allons donner ci-après quelques exemples d'application de la méthode des processus quasi réels dans des cas autres que celui du spectre de photons virtuels.

4.1. *Rayonnement de freinage d'un électron relativiste pour un angle de diffusion donné.* – Considérons une expérience où l'on veut mesurer la diffusion d'un faisceau d'électrons relativistes d'énergie  $E$  par des noyaux quelconques sous un angle  $\Theta$  donné. On aura pour l'énergie  $E'$  des électrons sortants un spectre (Fig. 7) qui comportera :

- a) le pic de diffusion élastique;
- b) éventuellement divers pics inélastiques;
- c) le spectre de rayonnement de freinage (« bremsstrahlung ») s'étendant depuis le pic élastique jusqu'à  $E' = m$  (où  $m$  est la masse de l'électron).

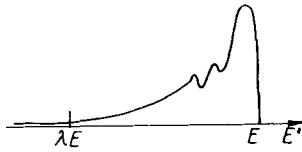


Fig. 7.

Nous supposons que l'on fait une coupure sur ce spectre d'énergie pour une valeur  $E'_{\min} = \lambda E$ , où  $\lambda$  est une fraction de l'unité. On admettra que  $\Theta$  et  $\lambda$  sont choisis tels que  $m/E, m/\lambda E \ll \Theta$ .

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer la méthode des processus quasi réels au calcul du rayonnement de freinage, en reliant celui-ci à la diffusion élastique, comme le montrent les deux diagrammes (a) et (b) de la Fig. 8. En effet, sur ces deux diagrammes, nous avons chaque fois au point  $P$  un processus quasi réel du type représenté par la Fig. 2.

En  $P$ , l'électron est essentiellement peu dévié, de sorte que nous pouvons sensiblement confondre l'angle total de diffusion  $\Theta$

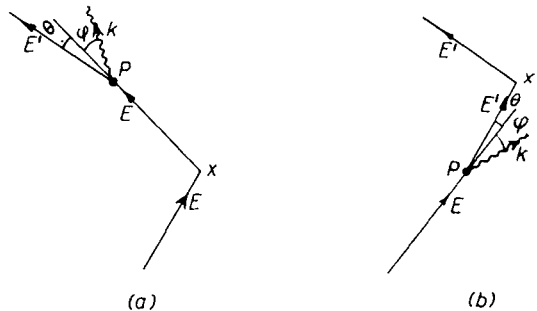


Fig. 8.

<sup>(12)</sup> K. L. BROWN et R. WILSON: *Phys. Rev.*, **93**, 443 (1954).

<sup>(13)</sup> W. K. H. PANOFSKY, C. M. NEWTON et G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **98**, 751 (1955);  
W. K. H. PANOFSKY, W. M. WOODWARD et G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **102**, 1392 (1956);  
G. B. YODH et W. K. H. PANOFSKY: *Phys. Rev.*, **105**, 731 (1957).

avec l'angle de la diffusion élastique. D'autre part, du fait que  $\varphi$  est essentiellement faible, on peut négliger les termes d'interférence entre les deux diagrammes: en effet, dans le cas (a) le photon est émis à peu près dans la direction de l'électron final, dans le cas (b) à peu près dans la direction de l'électron initial: les états finaux sont donc différents.

Soit  $\sigma_{ir}$  et  $\sigma_{el}$  les sections efficaces différentielles respectives du rayonnement de freinage et de la diffusion élastique pour l'angle  $\Theta$  donné. On peut écrire:

$$(36) \quad \sigma_{ir}(E) = \sigma_{ir}^{(a)} + \sigma_{ir}^{(b)},$$

$$(37) \quad \sigma_{ir}^{(a)} = \sigma_{el}(E) \cdot \int P(E, k) dk : \quad \sigma_{ir}^{(b)} = \int P(E, k) dk \cdot \sigma_{el}(E),$$

où  $P(E, k)$  est donné chaque fois par la formule (17).

Comme on a  $\sigma_{el}(E) \propto E^{-2}$  d'après la formule de Mott (en admettant que l'on puisse négliger l'effet de structure des noyaux), il vient:

$$(38) \quad \sigma_{ir}(E) = \sigma_{el}(E) \cdot \int P(E, k) dk \left( 1 + \frac{E^2}{E^2} \right),$$

et en explicitant:

$$(39) \quad \frac{\sigma_{ir}(E)}{\sigma_{el}(E)} = \frac{2z}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} q_{\max} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{(1-\lambda)E} \frac{dk}{k} \frac{|E^2 + (E-k)^2|}{2E^2(E-k)^2}.$$

Il convient de prendre  $q_{\max} \approx \Theta$ ; d'autre part,  $k_{\min}$  peut être choisi aussi voisin de zéro que l'on veut. Dans ces conditions, on obtient après intégration (en négligeant les termes en  $k_{\min}/E$ ):

$$(40) \quad \frac{\sigma_{ir}(E)}{\sigma_{el}(E)} = \frac{4z}{\pi} \left( \ln \frac{E\Theta}{m} - \frac{1}{2} \right) \left[ \ln \frac{E}{k_{\min}} + f(\lambda) \right],$$

où

$$(41) \quad f(\lambda) = \frac{1}{4} \ln \frac{(1-\lambda)^4}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda} - \frac{5}{8} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda^2}{8}.$$

Notons que le résultat ci-dessus aurait pu être obtenu également en faisant un calcul d'approximation (relativiste) à partir de la formule générale de Bethe et Heitler<sup>(14)</sup> pour le rayonnement de freinage. Un tel calcul a été effectué par SCHIFF<sup>(15)</sup>, avec toutefois des conditions aux limites un peu différentes.

(14) H. A. BETHE et W. HEITLER: *Proc. Roy. Soc.*, A **146**, 83 (1934).

(15) L. I. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **87**, 750 (1952).

(Dans le cas traité par SCHIFF, une limite inférieure est imposée au moment de recul du noyau, et non à l'énergie finale de l'électron.)

Nous pouvons considérer que la formule (40) donne une correction à apporter à la section efficace de diffusion élastique, correction due à l'émission de photons réels d'énergie  $k > k_{\min}$ : Soit  $\delta' = \sigma_{br}(E)/\sigma_{el}(E)$  ce terme correctif. Si on le considère isolément, on se trouve devant le problème apparent d'une divergence infra-rouge. Mais en fait, il faut additionner  $\delta'$  avec le terme  $-\delta$  calculé par SCHWINGER <sup>(16)</sup>, et qui correspond à la somme de la correction radiative proprement dite (due à l'émission et à la réabsorption de photons virtuels) et de la correction associée à l'émission de photon réels de très basse énergie ( $k < k_{\min}$ ). Le résultat de Schwinger est:

$$(42) \quad -\delta = -\frac{4\alpha}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{E\Theta}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \ln \frac{E}{k_{\min}} - \frac{13}{12} \right) + \frac{17}{72} + \Phi(\Theta) \right],$$

où  $\Phi(\Theta)$  est donné par:

$$(43) \quad \Phi(\Theta) \simeq \frac{1 - \cos \Theta/2}{[2 \cos(\Theta/2)(1 + \cos \Theta/2)]^{1/2}} \left[ \ln \frac{1}{2(1 - \cos \Theta/2)} + \frac{1 - \cos \Theta/2}{2} + 1 \right].$$

On obtient ainsi la correction radiative totale  $\Delta = \delta' - \delta$ , qui inclut à la fois la correction radiative proprement dite et le rayonnement de freinage:

$$(44) \quad \Delta = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left( \ln \frac{E\Theta}{m} - \frac{1}{2} \right) \left[ \ln \frac{(1-\lambda)^4}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{11}{6} + \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right] - \frac{17}{18} - 4\Phi(\Theta) \right\}.$$

$\Delta$  peut être négatif ou positif, suivant que le paramètre  $\lambda$  a une valeur plus ou moins voisine de 1. Ainsi, pour des électrons d'une énergie de 200 MeV, diffusés sous un angle de  $60^\circ$ , on trouve:  $\Delta = -7.6\%$  pour  $\lambda = 0.9$ ;  $\Delta = +2.3\%$  pour  $\lambda = 0.5$ .

**4.2. Recul des noyaux dû à la création de paires par des photons de haute énergie.** — Supposons réalisée une expérience où l'on bombarde des noyaux avec des photons d'énergie élevée et où l'on observe le recul des noyaux provoqué par la création de paires d'électrons. Nous supposons que ce recul est mesuré sous un certain angle  $\gamma$  par rapport au photon incident et au-dessus d'un seuil expérimental  $q_{\min} \gg m$  (où  $m$  est la masse de l'électron); ces conditions seraient analogues à celles de l'expérience de Tautfest et Panofsky <sup>(17)</sup>, où l'on a ainsi

<sup>(16)</sup> J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **75**, 899 (1949).

<sup>(17)</sup> G. W. TAUTFEST et W. K. H. PANOFSKY: *Phys. Rev.*, **105**, 1356 (1957).

mesuré la diffusion (élastique et radiative) d'électrons de haute énergie par des protons.

La section efficace différentielle de création de paires, dans les conditions indiquées, se calculera en additionnant les termes donnés par les deux diagrammes de la Fig. 9. Du fait que les angles  $\varphi, \varphi_+$  sont essentiellement faibles, on peut négliger les termes d'interférence entre les deux diagrammes: en effet, les états finaux sont différents, puisque dans le cas (a) c'est le positron qui va à peu près vers l'avant, dans le cas (b) c'est l'électron.

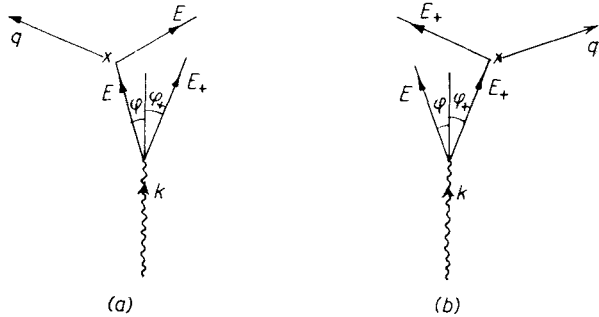


Fig. 9.

La petitesse des angles  $\varphi, \varphi_+$  permet d'autre part de prendre:  $\gamma \simeq \pi/2 - \Theta/2$ ,

où  $\Theta$  est l'angle de la diffusion élastique de l'électron ou du positron sur le noyau. Il en résulte que le recul est lié à l'énergie de l'électron ou du positron diffusé par:  $q \simeq 2E \cos \gamma$  dans le cas (a) ou  $q \simeq 2E_+ \cos \gamma$  dans le cas (b). Il est bien entendu que l'on doit avoir *a priori*:  $k > q_{\min}/2 \cos \gamma$ .

Du fait de la symétrie de charge, il est évident que les deux diagrammes donneront le même résultat. D'où:

$$(45) \quad \sigma_{\text{air}}(k) = \sigma^{(a)} + \sigma^{(b)} = 2\sigma^{(a)} = 2 \int P(k, E) dE \cdot \sigma_{\text{el}}(E),$$

où  $P(k, E)$  est donné par la formule (35).

On a par ailleurs, d'après la formule de Mott:  $\sigma_{\text{el}}(E) = \sigma_{\text{el}}(k) \cdot k^2/E^2$ , où  $\sigma_{\text{el}}(k)$  est la section efficace différentielle de diffusion élastique pour un électron d'énergie  $k$ , diffusé sous l'angle  $\Theta$ . D'où:

$$(46) \quad \sigma_{\text{air}}(k) = \sigma_{\text{el}}(k) \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \left( \ln \frac{E}{m q_{\max}} - \frac{1}{2} \right) \frac{E^2 + (k - E)^2}{E^2} \frac{dE}{k}.$$

On a:  $E_{\min} = q_{\min}/2 \cos \gamma$ ; d'autre part, on peut prendre:  $E_{\max} = k$ , et  $q_{\max} \simeq \Theta \simeq 2 \cos \gamma$ ; enfin, on ne commet pas d'erreur sensible en substituant  $E_{\min}$  à  $E$  sous le logarithme. Dans ces conditions, l'intégration donne:

$$(47) \quad \sigma_{\text{air}}(k) = \sigma_{\text{el}}(k) \cdot \frac{4\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{q_{\max}}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{k \cos \gamma}{q_{\min}} - \ln \frac{2k \cos \gamma}{q_{\min}} + \frac{1}{2} - \frac{q_{\min}}{2k \cos \gamma} \right).$$

4.3. *Rayonnement de freinage interne dans la désintégration du méson  $\mu$ .* — Au cours des dernières années, divers auteurs (18-20) ont étudié le problème des corrections radiatives dans la désintégration du méson  $\mu$ . D'autre part, la

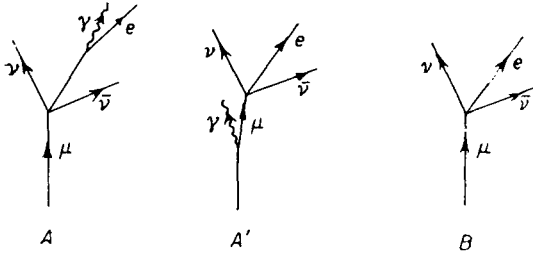


Fig. 10.

possibilité de détecter expérimentalement l'effet de rayonnement de freinage interne a été examinée (21).

Ce dernier problème revient à évaluer le rapport de branchement entre les réactions  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} + \gamma$  et  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ , en fixant un seuil expérimental raisonnable pour l'énergie du photon émis.

Il s'agit donc de comparer les diagrammes *A* et *A'* de la Fig. 10 avec le diagramme *B*. Nous plaçant dans le système de référence où le méson  $\mu$  est au repos, nous pouvons admettre *a priori* que la contribution de *A'* est négligeable par rapport à celle de *A*.

Considérons le processus *B*. Soit  $E$  l'énergie de l'électron créé,  $m$  sa masse; son énergie maximum est:  $W \simeq \frac{1}{2} m_\mu \simeq 100m$ . Le spectre d'énergie est donné par la formule de Michel:

$$(48) \quad f(E) dE = \frac{4E}{3W^4} [9(W - E) + 2\varrho(4E - 3W)] dE,$$

où  $\varrho$  a été défini à l'origine comme un paramètre compris entre 0 et 1, sa valeur étant fonction de la nature du couplage entre les quatre fermions; la valeur généralement adoptée à l'heure actuelle est  $\varrho \simeq 0.75$  (correspondant au couplage  $V-A$  proposé par FEYNMAN et GELL-MANN (22)).

Il résulte de l'expression du spectre (48) que la région où l'on a  $E \gg m$  joue un rôle prépondérant. Ceci permet d'appliquer notre méthode, et de relier le diagramme *A* à *B* en traitant l'émission du photon par l'électron comme un processus élémentaire quasi réel.

Dans ces conditions, compte tenu du fait que pour le processus *B* le spectre total  $\int f(E) dE$  est normalisé à l'unité, le rapport de branchement  $\delta = \sigma_A / \sigma_B$

(18) R. E. BEHREND, R. J. FINKELSTEIN et A. SIRLIN: *Phys. Rev.*, **101**, 866 (1956).

(19) S. M. BERMAN: *Phys. Rev.*, **112**, 267 (1958).

(20) T. KINOSHITA et A. SIRLIN: *Phys. Rev.*, **113**, 1652 (1959).

(21) T. KINOSHITA et A. SIRLIN: *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 177 (1959).

(22) R. P. FEYNMAN et M. GELL-MANN: *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958).



sera défini par

$$(49) \quad \delta = \int_{E_{\min}}^{W} f(E) dE \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} P(E, k) dk,$$

où  $P(E, k)$  est donné par la formule (17).

On attribuera au seuil  $k_{\min}$  une valeur de l'ordre de quelque masses électroniques. D'autre part, on peut prendre:  $k_{\max} \simeq E$ ,  $\varphi_{\max} \simeq 1$ . D'où:

$$(50) \quad \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} P(E, k) dk \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \ln \frac{E}{k_{\min}} - \frac{3}{4} \right),$$

ayant négligé les termes en  $k_{\min}/E$ .

Posons maintenant:  $x = E/W$ ;  $l = \ln k_{\min}/m$ , et notons que:  $\ln W/m \simeq 4.6$ . L'équation (50) prend la forme:

$$(51) \quad \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} P(E, k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} (a + b \ln x + \ln^2 x),$$

avec:  $a = 16 - 4.1l$ ;  $b = 8 - l$ . D'où:

$$(52) \quad \delta = \frac{8\alpha}{3\pi} \int_{x_{\min}}^1 [9(x^2 - x^3) - 2\varrho(4x^3 - 3x^2)] (a + b \ln x + \ln^2 x) dx.$$

On a  $x_{\min} \approx k_{\min}/W \ll 1$ ; il s'ensuit que l'on aura une bonne approximation en prenant une limite d'intégration inférieure nulle. On obtient ainsi:

$$(53) \quad \delta = \frac{8\alpha}{3\pi} \left[ \frac{3}{4} a - \frac{7}{16} b + \frac{37}{96} - \varrho \left( \frac{b}{6} - \frac{7}{36} \right) \right] = [5.5 - 1.6l + \varrho(0.7 - 0.1l)] \%.$$

On constate que le résultat est peu sensible à la valeur de  $\varrho$ . Pour  $\varrho = 0.75$ , le rapport de branchement se réduit à:

$$(54) \quad \delta = (6 - 1.7l) \%.$$

En prenant par exemple  $k_{\min} = 2m$ , on obtient  $\delta = 4.8\%$ . Ce chiffre est en excellent accord avec le résultat de KINOSHITA et SIRLIN<sup>(21)</sup>, obtenu à la suite de calculs plus complexes.

4.4. *Rayonnement de freinage interne dans la désintégration  $\beta$  de  $^{12}\text{B}$  et  $^{12}\text{N}$ .* — Notre méthode peut évidemment s'étendre au calcul du rayonnement de freinage interne dans la désintégration  $\beta$ , chaque fois que le bilan d'énergie est élevé par rapport à la masse de l'électron. Ceci est le cas, entre autres, dans les réactions  $^{12}\text{B}(\beta^-)^{12}\text{C}$  et  $^{12}\text{N}(\beta^+)^{12}\text{C}$ , où l'énergie maximum de l'électron négatif ou positif émis est respectivement de 13.9 et 17.1 MeV.

Il a été récemment suggéré<sup>(23, 24)</sup> que la comparaison expérimentale entre ces deux réactions pouvait fournir un test de validité de la théorie de Feynman et Gell-Mann<sup>(22)</sup> sur l'interaction vectorielle dans la désintégration  $\beta$ . Or, le calcul comparé des deux spectres fait intervenir différentes corrections électromagnétiques (voir<sup>(25)</sup>) dont l'une est due au rayonnement de freinage interne. En effet, le taux de branchement de ce processus (par rapport à la désintégration  $\beta$  non radiative) n'est pas le même pour  $^{12}\text{B}$  et  $^{12}\text{N}$ , en raison de la différence entre les bilans d'énergie.

Supposons que l'on mesure l'un et l'autre spectre pour une énergie déterminée  $E$  ( $\gg m$ ) de l'électron. Dans ce cas, le taux de branchement du rayonnement de freinage interne (soit pour  $^{12}\text{B}$ , soit pour  $^{12}\text{N}$ ) est défini par:

$$(55) \quad \delta = [f(E)]^{-1} \cdot \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} f(E+k) P(E+k, k) dk,$$

où le spectre  $f(E)$  est donné en première approximation par la formule de FERMI<sup>(26)</sup> pour les transitions  $\beta$  permises:

$$(56) \quad f(E) dE \propto E^2(W-E)^2 dE,$$

$W$  étant l'énergie maximum de l'électron. D'autre part, d'après notre formule (17),  $P(E+k, k)$  est défini par:

$$(57) \quad P(E+k, k) dk = \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E+k}{m} - \frac{1}{2} \right) \frac{dk}{k} \frac{2E^2 + 2Ek + k^2}{(E+k)^2}.$$

On peut valablement substituer  $E$  à  $E+k$  sous le logarithme, et prendre  $\varphi_{\max} \simeq 1$ . Notons d'autre part que  $k_{\max} = W - E$ . Il vient dans ces conditions:

$$(58) \quad \delta = E^{-2} k_{\max}^{-2} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} (k_{\max} - k)^2 (2E^2 + 2Ek + k^2).$$

<sup>(23)</sup> M. GELL-MANN: *Phys. Rev.*, **111**, 362 (1958).

<sup>(24)</sup> M. MORITA: *Phys. Rev.*, **113**, 1584 (1959).

<sup>(25)</sup> M. GELL-MANN et S. M. BERMAN: *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 99 (1959).

<sup>(26)</sup> E. FERMI: *Zeits. Phys.*, **88**, 161 (1934).

En négligeant les termes en  $k_{\min}/E$  et  $k_{\min}/k_{\max}$ , l'intégration donne:

$$(59) \quad \delta = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} - \frac{3}{2} + \frac{k_{\max}}{3E} + \frac{k_{\max}^2}{24E^2} \right).$$

Il s'ensuit que le terme correctif qui intervient dans la comparaison qui nous intéresse est de la forme:

$$(60) \quad \delta_B - \delta_N = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \ln \frac{W_B - E}{W_N - E} + \frac{W_B - W_N}{4E} + \frac{W_B^2 - W_N^2}{24E^2} \right),$$

où nous avons utilisé les indices B et N pour les quantités relatives à la désintégration de  $^{12}\text{B}$  et  $^{12}\text{N}$  respectivement.

Ce résultat ne diffère pas sensiblement de celui donné par GELL-MANN et BERMAN (formule (5) de la référence (25)); ces auteurs avaient utilisé une méthode moins générale.

## 5. - Conclusion.

Les exemples d'application qui précèdent mettent en lumière l'utilité de la méthode des processus quasi réels. Bien que dans tous les cas traités d'autres méthodes puissent être employées également et conduisent aux mêmes résultats, il est manifeste que la nôtre apporte une simplification importante. Elle permet chaque fois de déterminer l'ordre de grandeur associé à un processus relativiste sans en faire le calcul détaillé; on le relie directement à un processus d'ordre inférieur dont on connaît le résultat, et le calcul devient alors presque immédiat en utilisant nos formules.

Il est certainement souhaitable d'étendre encore le domaine d'application de ce type de méthode; il nous semble que des généralisations pourraient être tentées dans diverses directions.

Ainsi, on peut envisager l'extension de notre procédé aux effets qui impliquent les interactions pion-nucléon. Si l'on admettait que l'on peut ici encore appliquer la théorie du couplage faible et représenter valablement un processus donné par le diagramme correspondant à l'ordre le plus bas, le problème ne serait pas plus compliqué qu'en électrodynamique (27). On calculerait alors

(27) Le fait que le pion (contrairement au photon) possède une masse ne constitue pas une difficulté sérieuse, du moment que cette masse est faible par rapport à celle du nucléon (voir G. MORPURGO: *Nuovo Cimento*, **6**, 504 (1949)).

aisément la probabilité associée au processus quasi réel représenté par un diagramme élémentaire comportant deux lignes de fermion (relativiste) et une ligne de boson; on obtiendrait ainsi une formule simple qui serait analogue à la formule de Williams et Weizsäcker pour le cas fermion-photon. Ceci permettrait de rattacher par exemple un processus dû à l'interaction mésique d'un nucléon relativiste au processus équivalent produit par des mésons  $\pi$  libres. Des tentatives semblables ont d'ailleurs déjà été faites par divers auteurs <sup>(28,29)</sup>.

La difficulté vient évidemment ici du couplage fort dont la présence nous interdit de négliger les diagrammes d'ordre supérieur. Il semble que l'inclusion obligatoire des corrections radiatives mésiques complique considérablement le problème, en faisant apparaître, en dehors du terme « quasi réel » (correspondant au pôle du propagateur de la particule virtuelle) d'autres termes non négligeables <sup>(30)</sup>.

Un autre essai de généralisation qui pourrait être tenté consisterait à chercher dans quelle mesure on peut étendre éventuellement le principe de notre méthode aux processus non-relativistes. Dans cette perspective, il pourrait être commode d'utiliser des transformations de Lorentz ayant pour effet de passer chaque fois du système du laboratoire à un système de référence dans lequel toutes les particules en présence seraient extrême-relativistes.

Il nous paraît certain, de toute manière, que le concept des processus quasi réels pourra être appliqué utilement dans de nombreux cas où l'on cherchera à calculer de façon simple les ordres de grandeur d'effets complexes étudiés en physique expérimentale moderne.

\* \* \*

Je désire signaler que la partie de ce travail qui est exposée à la Sect. 2 a été réalisée en collaboration avec le Dr. DAN KESSLER, de l'Institut Weizman (Rehovot, Israël). Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également le Professeur M. GELL-MANN et le Dr. D. BERLEY, actuellement au Laboratoire de Physique Atomique du Collège de France, qui m'ont fait de très utiles suggestions.

Enfin, j'exprime ma sincère reconnaissance au Centre National de la Recherche Scientifique (France), sous les auspices duquel j'ai accompli le présent travail.

<sup>(28)</sup> G. F. CHEW et F. E. LOW: *Phys. Rev.*, **113**, 1640 (1959).

<sup>(29)</sup> E. FERRARI: *Nuovo Cimento*, **13**, 1285 (1959) et **15**, 652 (1960).

<sup>(30)</sup> M. GELL-MANN: communication privée.

## RIASSUNTO (\*)

Proponiamo un metodo semplificato di calcolo approssimato per i processi relativistici in elettrodinamica quantistica. Il nostro punto di partenza è una generalizzazione teorica nel campo quantistico del metodo semiclassico di Williams-Weizsäcker, che definisce uno spettro fotonico equivalente per una particella relativistica carica. Poi mostriamo che si può scrivere una formula del tipo Williams-Weizsäcker per esprimere la probabilità associata ad ogni diagramma elementare contenente due linee di fermioni ed una di fotoni, purchè entrambi gli stati fermionici siano relativistici. Si danno molti esempi di casi in cui questo concetto è applicato per calcolare processi di ordine superiore riferendoli direttamente ad effetti più semplici. I casi trattati sono: 1) bremsstrahlung di una particella relativistica ad un dato angolo; 2) rinculo nucleare per creazione di coppie da fotoni di alta energia; 3) bremsstrahlung interna nella disintegrazione del mesone  $\mu$ ; 4) correzioni radiative negli spettri  $\beta$  di raffronto di  $^{12}\text{B}$  e  $^{12}\text{N}$ . In conclusione si discutono brevemente ulteriori possibilità di estendere il metodo (specialmente alla teoria dei mesoni  $\pi$ ).

(\*) Traduzione a cura della Redazione.