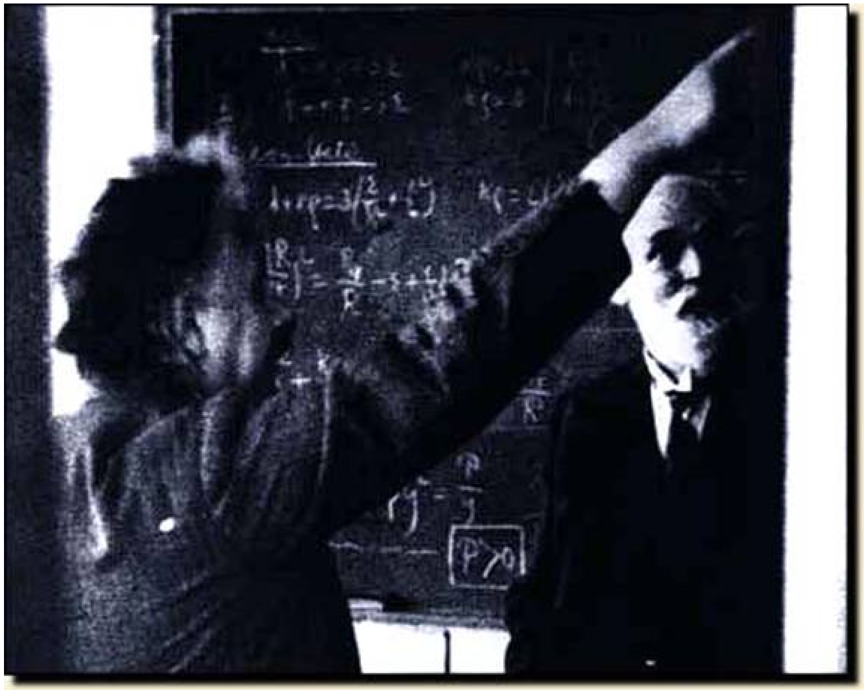
Friedmannologie II



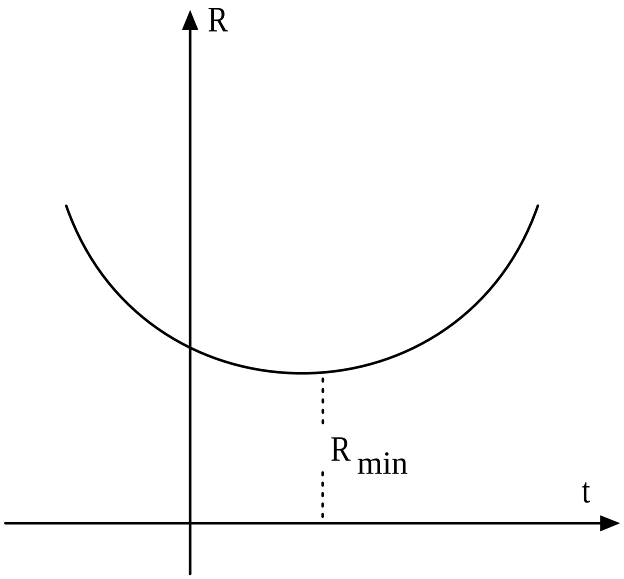
Inhalt der Vorlesung

- Andere Universen
- Numerische Lösung
- Die strahlungsdominierte Epoche

25 Andere Universen

1. de Sitter Modell: $\Omega_K = \Omega_R = \Omega_M = 0$
Diesen Fall haben wir schon betrachtet. Im allgemeinen Formalismus gilt $P(z) = \Omega_V$, daher

$$\frac{R}{R_0} = \exp\left(\sqrt{\Omega_V} H_0 (t - t_0)\right) = \exp\sqrt{\Lambda/3}(t - t_0) \quad . \tag{132}$$



2. Universen ohne Urknall: Es gibt auch Lösungen ohne Urknall. Aus der Skizze lesen wir die Bedingung $\dot{R} = \dot{R}_{\min} = 0$ ab. Mit $\Omega_R = 0$ folgt aus (114)

$$\dot{R}^2 = R_0^2 H_0^2 \left(\Omega_M \left(\frac{R_0}{R} \right) + \Omega_V \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + \Omega_K \right) \quad . \tag{133}$$

$\dot{R}^2$ wird minimal bei einem kritischen Radius R_c

$$-\Omega_M \frac{R_0}{R_c^2} + \Omega_V \frac{2R_c}{R_0^2} = 0 \quad , \tag{134}$$

also

$$\frac{R_c}{R_0} = \left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_V}\right)^{1/3} \quad . \tag{135}$$

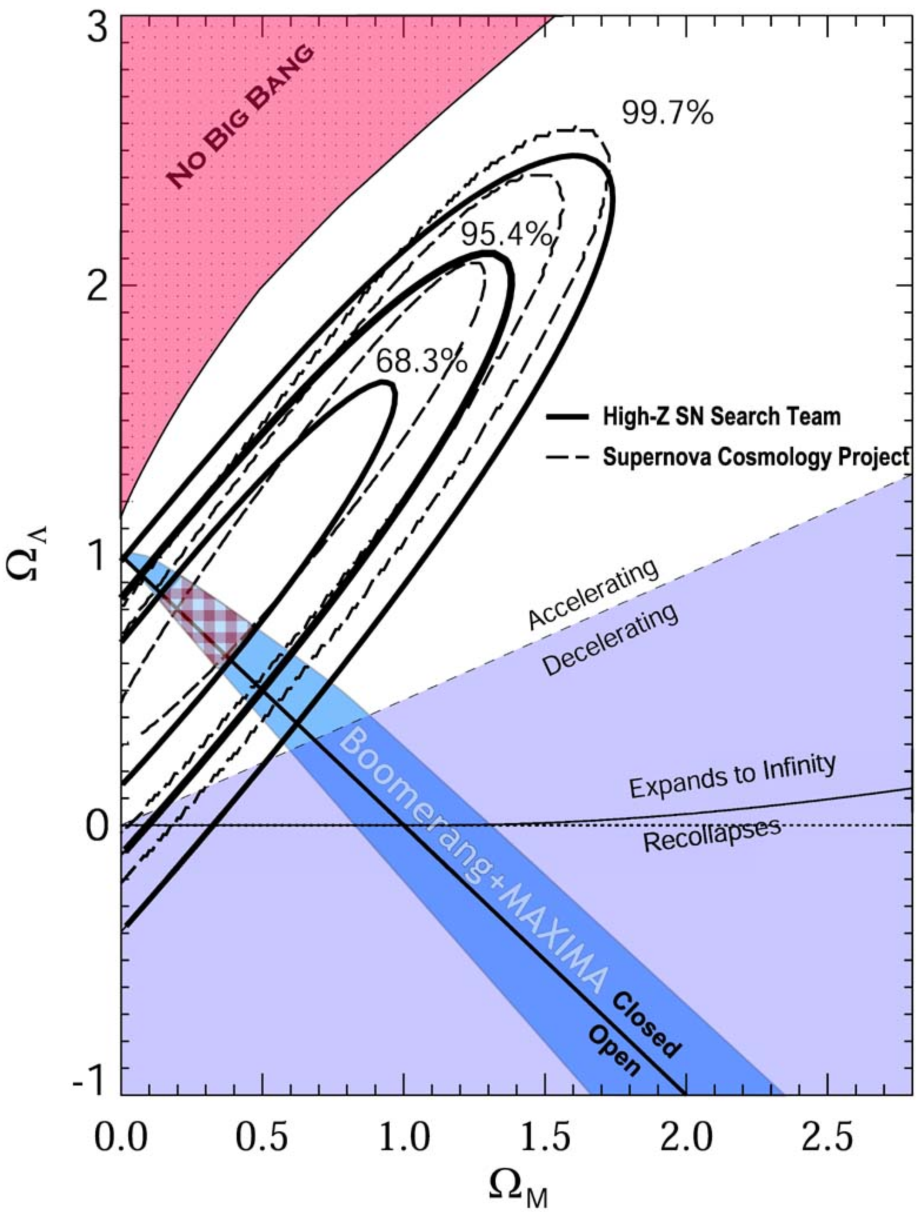
Die Bedingung $\dot{R}^2_{\text{min}} = 0$ wird daher für

$$\frac{3}{2^{2/3}} \Omega_M^{2/3} \Omega_V^{1/3} + \Omega_K = 0 \tag{136}$$

erreicht. Dies ist nur für $k = 1$ möglich ($\Omega_K < 0$!). Wir ersetzen noch Ω_K durch $1 - \Omega_M - \Omega_V$ und erhalten dadurch die Bedingungsgleichung

$$\frac{1.89 \Omega_M^{2/3} \Omega_V^{1/3}}{\Omega_M + \Omega_V - 1} = 1 \quad . \tag{137}$$

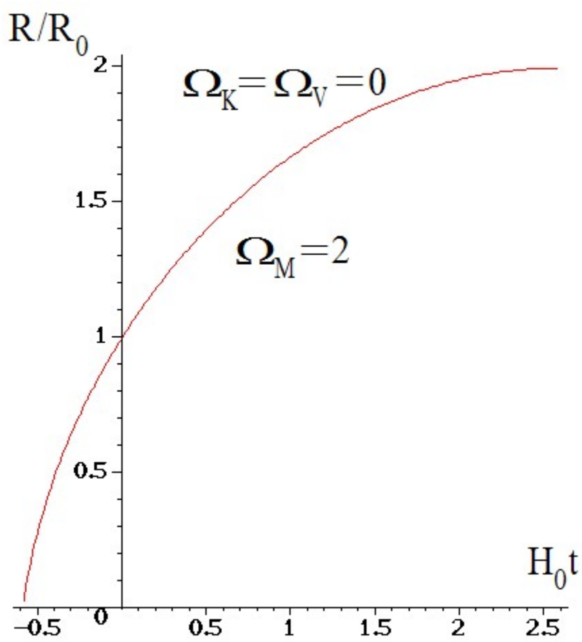
Diese Kurve grenzt das pinkfarbene Gebiet ohne Urknall in der folgenden Figur ab.



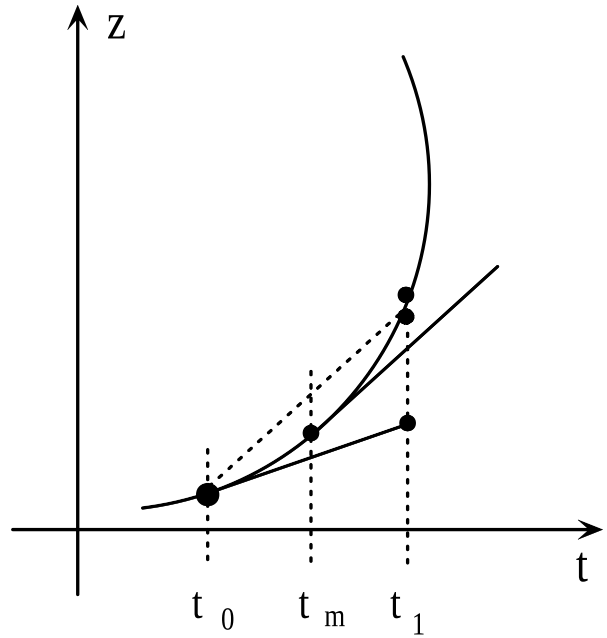
Beachten Sie die Linien $q_0 = 0$, $k = 0$, $\Omega_V = 0$ und die Abgrenzung des "no big bang" Gebiets.

26 Numerische Lösung:

Für beliebige Ω_i läßt sich (120) nur numerisch lösen. Wir untersuchen numerische Lösung von (119). Für jedes Zeitintervall $H_0 dt$ wird $dz = -(1+z)P(z)dt$ berechnet. Unser MAPLE Programm ist komplizierter, da Genauigkeitsprobleme auftreten und man besser $\dot{z}(t)$ durch $(\dot{z}(t) + \dot{z}(t+dt))/2$ ersetzt.



Der Zeitpunkt "heute" wird nach $t = 0$ verlegt. Die Berechnung von Zukunft und Vergangenheit muß getrennt erfolgen. Es wird nur $\dot{z} > 0$ berücksichtigt.



Gegeben: $\dot{z} = f(z)$. Einfachste Näherung:

$$z_{1,0} \approx z_0 + \dot{z}(z_0)\Delta t \tag{138}$$

Verbesserung:

$$z_{1,1} \approx z_0 + \dot{z}(z_m)\Delta t \tag{139}$$

Ansatz: $\dot{z}(z_m) \approx (\dot{z}(z_0) + \dot{z}(z_{1,0}))/2$. Damit ist schrittweise numerische Integration möglich.

27 Die strahlungsdominierte Epoche

In der Behandlung unseres Universums wurde $\Omega_R = 0$ angesetzt. Mit $\Omega_R = 4.9 \cdot 10^{-5}$ scheint dies eine sehr gute Näherung zu sein. Betrachtung von $P(z)$ zeigt jedoch, daß für große z der Term mit Ω_R dominiert. Die Grenze liegt bei

$$\Omega_M = \Omega_R(1+z) \tag{140}$$

also

$$z_{\mathrm{Gr}} = 5500 \tag{141}$$

und mit dem $R \sim t^{2/3}$-Gesetz materiedominierter Universen (125) gilt die Abschätzung

$$t_{\mathrm{Gr}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_M(1+z)^3}} \quad , \tag{142}$$

also $t_{\mathrm{Gr}} \approx 41000$ y. Für $t \ll t_{\mathrm{Gr}}$ gilt mit $P(z) = (1+z)^4 \Omega_R$

$$H_0 t = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_R}(1+z)^2} \tag{143}$$

also

$$\frac{R}{R_0} = \left(2 H_0 \sqrt{\Omega_R} t\right)^{1/2} \tag{144}$$

bzw.

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{4\kappa \rho_{R,0} t^2}{3}\right)^{1/4} \tag{145}$$

das Gesetz $R/R_0 \sim (t/t_0)^{2/3}$ der materiedominierten Epoche wird also durch $R/R_0 \sim \sqrt{t/t_0}$ ersetzt. Das Skalengesetz $R^4 \rho_R = R_0^4 \rho_{R,0}$ ergibt parameterfrei

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\rho_R \kappa}} \ , \tag{146}$$

woraus mit dem Stefan-Boltzmann Gesetz $\rho_R c^2 = 4\sigma T^4/c$ der fundamentale Zusammenhang

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3c^3}{4\sigma\kappa T^4}} \quad , \tag{147}$$

zwischen der Zeit und der Temperatur berechnet wird.
($\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-3}K^{-4}, $\sigma/c = 1180.1$ eVm^{-3}K^{-4}). Wir müssen also die Thermodynamik des frühen Universums betrachten.
Numerisch gilt

$$t = 2.3 \cdot 10^{20}\mathrm{s}\,\mathrm{K}^2 \frac{1}{T^2} \quad . \tag{148}$$

Die Temperatur ist proportional zur mittleren Energie der Photonen $\overline{W}_\gamma = 2.7kT$ und daher

$$t = 1.24 \cdot 10^{13}\mathrm{s}\,\mathrm{eV}^2 \frac{1}{\overline{W}_\gamma^2} \quad . \tag{149}$$

Schließlich folgt mit (145)

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{\rho_{R,0}c^3}{4\sigma}\right)^{1/4} \frac{1}{T} \tag{150}$$

oder $R/R_0 = 1.55\mathrm{K}/T$, also grob $R/R_0 = 2\mathrm{K}/T$.

Oberhalb einer Temperatur von ca. $5 \cdot 10^9$ K sind die Photonen nicht mehr die einzigen relativistischen Teilchen. Die Energie der Photonen reicht aus, e^+e^- Paare zu erzeugen. Außerdem wird die Wechselwirkungsrate der Neutrinos so groß, daß auch sie mit den anderen Teilchen im thermischen Gleichgewicht sind. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz wird durch $\rho_R c^2 = 2g\sigma T^4/c$ ersetzt, worin g ein vom Teilcheninhalt des Universums abhängiger Spinfaktor ist. Entsprechend werden die Gesetze (148) und (150) modifiziert. Diese Zusammenhänge werden in den nächsten Vorlesungen behandelt.

Ohne Berücksichtigung der Spinfaktoren können die Werte für die

Zeiten im sehr frühen Universum bis zu einem Faktor 7 falsch werden. Für einen groben Überblick reichen aber die Formeln (148) und (150) auch oberhalb von $5 \cdot 10^9$ K aus. Die Planck-Zeit wird direkt aus (146) berechnet.

Die Tabelle zeigt einige wichtige Markierungen, die besprochen werden.

T/K	$\overline{W}_\gamma$/MeV	Skala	Zeit/s	Ereignis
4000	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{13}$	Atome
10^9	0.25	$2 \cdot 10^{-9}$	200	Helium, Kerne
10^{12}	250	$2 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	μ-Paare
10^{28}	10^{18}	$2 \cdot 10^{-28}$	$1.5 \cdot 10^{-35}$	GUT's, Infl.
10^{32}	10^{22}	$2 \cdot 10^{-32}$	$0.92 \cdot 10^{-44}$	Planck Ära

Die Geschichte des Universums in 60 Dekaden!