Friedmannologie

A. A. Friedmann 1888-1925

Inhalt der Vorlesung

- Umformung der Friedmanngleichung
- Fallstudien materiedominierter Universen
- Unser Universum

22 Umformung der Friedmann-Gleichung

Um eine systematische Diskussion der Lösungen der Friedmann-Gleichung

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\kappa \rho_T}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \tag{113}$$

mit $\rho_T = \rho_M + \rho_R + \rho_V$ vorzubereiten, formen wir diese um. Unter Benutzung der Skalierungsgesetze (72) bis (74) und der Dichteparameter Ω_i ergibt sich

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_M \left(\frac{R_0}{R}\right) + \Omega_R \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \Omega_V \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + \Omega_K\right) \quad , \tag{114}$$

worin eine relative "Krümmungsdichte" Ω_K mit

$$\Omega_K = \frac{-kc^2}{R_0^2 H_0^2} \quad . \tag{115}$$

ist. Es gilt demnach

- $\Omega_K = 0$ für $k = 0$
- $\Omega_K > 0$ für $k < 0$
- $\Omega_K < 0$ für $k > 0$

Aus (92) wird

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_V + \Omega_K = 1 \quad , \tag{116}$$

Ω_K ist also eine Abkürzung für $1 - \Omega_M - \Omega_R - \Omega_V$. Mit Hilfe des Zusammenhangs $1 + z = R_0/R$ zwischen Skalenparameter und Rotverschiebung

erhalten wir

$$\dot{z}^2 = H_0^2 (1+z)^2 P(z) \tag{117}$$

mit

$$P(z) = \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_R (1+z)^4 + \Omega_V + \Omega_K (1+z)^2 \tag{118}$$

bzw.

$$\dot{z} = -H_0 (1+z) \sqrt{P(z)} \quad . \tag{119}$$

Das negative Vz. wurde gewählt, damit bei positivem H_0 zu einem positiven Zeitschritt dt ein positiver Wert dR gehört.

(119) ist die nun benutzte Form der Friedmanngleichung. Wenn man zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ ("heute") die kosmologischen Parameter H_0, Ω_M, Ω_R und Ω_V kennt, kann der geamte Verlauf $z(t)$ (bzw. $R(t)/R_0$) mit der Anfangsbedingung $z(t_0) = 0$ berechnet werden. Zu beachten ist, daß die Materie immer als ruhend angenommen wird ($p = 0$). Die allgemeine Lösung von (119) lautet

$$(t_0 - t)H_0 = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1+\zeta)\sqrt{P(\zeta)}} \quad . \tag{120}$$

Wenn dieses Integral keine analytische Lösung hat, muß man (119) numerisch integrieren.

23 Fallstudien materiedominierter Universen

1. $\Omega_V = \Omega_R = 0$ und $\Omega_M > 1$

$$P(z) = \Omega_M (1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^2 \quad . \tag{121}$$

Mit der Substitution $y = R/R_0 = 1/(1+z)$ folgt

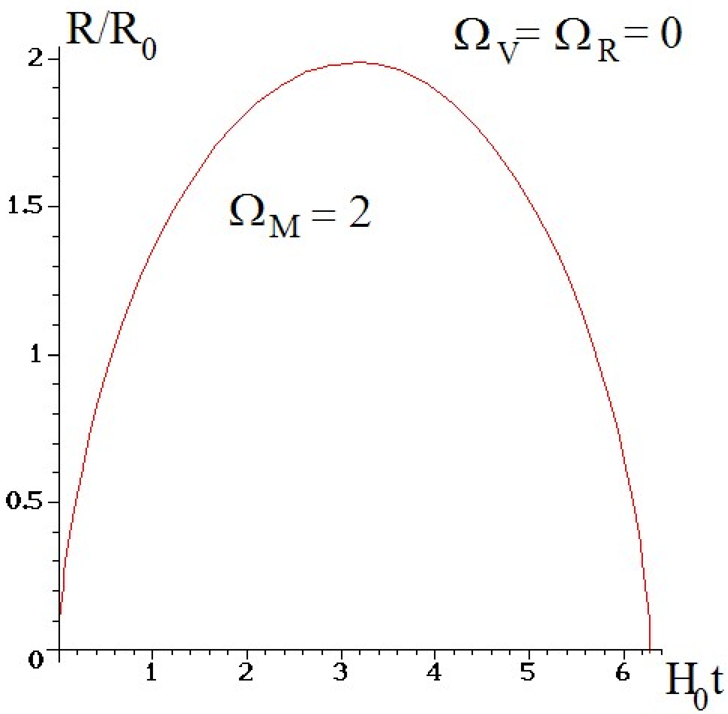
$$\dot{y} = H_0 \sqrt{1 - \Omega_M + \Omega_M / y} \quad . \tag{122}$$

Mit einer neuen Zeit $t' = H_0 t \sqrt{\Omega_M - 1}$ und der Abkürzung $a = \Omega_M / 2(\Omega_M - 1)$ gilt dann

$$\frac{dy}{dt'} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \quad , \tag{123}$$

also Zykloide mit der Parameterdarstellung

$$y = a(1 - \cos\theta) \quad t' = a(\theta - \sin\theta) \tag{124}$$



Die Abb. zeigt das Beispiel $\Omega_M = 2$. Das Alter des Universums folgt aus $\theta_0 = \pi/2$ bei $y = 1$, also $t_0 = 0.57/H_0$.

Nach der Zeit $H_0 t = \pi\Omega_M/(\Omega_M - 1)^{3/2}$ ist das Universum wieder auf einen Punkt geschrumpft und ein neuer Zyklus beginnt. Im Grenzfall $t \to 0$ vereinfacht sich die Lösung zu

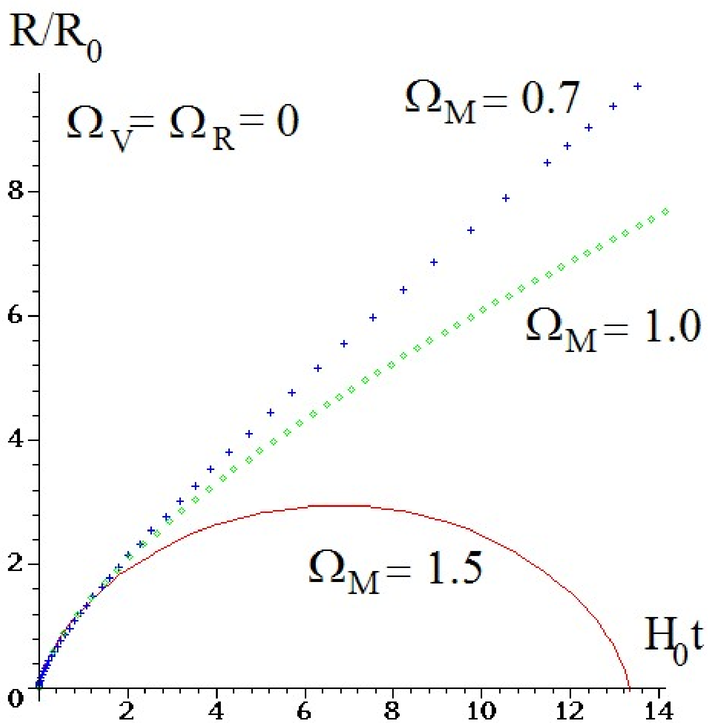
$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_M} H_0 t\right)^{2/3} \quad . \tag{125}$$

2. $\Omega_V = \Omega_R = 0$ und $\Omega_M = 1$ Die Lösung von (120) wird besonders einfach:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3} \quad . \tag{126}$$

3. $\Omega_V = \Omega_R = 0$ und $\Omega_M < 1$. Lösung durch eine Parameterdarstellung

$$y = a(1 - \cosh\theta) \quad t' = a(\theta - \sinh\theta) \tag{127}$$

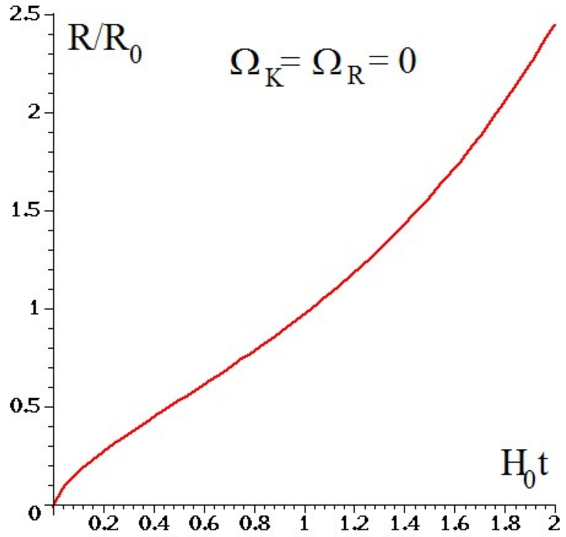


Die Abb. zeigt, daß für $t \to 0$ alle 3 Fälle sehr ähnlich werden, $y \sim (H_0 t)^{2/3}$.

Alle drei Varianten haben zu Beginn den Urknall!

24 Unser Universum

$\Omega_K = \Omega_R = 0$



$$P(z) = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_V \quad (128)$$

Mit der Substitution $1+\zeta = x^{-2/3}$ in(120) folgt unter Beachtung von $\Omega_M + \Omega_V = 1$

$$\frac{R}{R_0} = \left[\sqrt{\frac{\Omega_M}{1-\Omega_M}}\sinh\left(\frac{3H_0t\sqrt{1-\Omega_M}}{2}\right)\right]^{2/3} \quad (129)$$

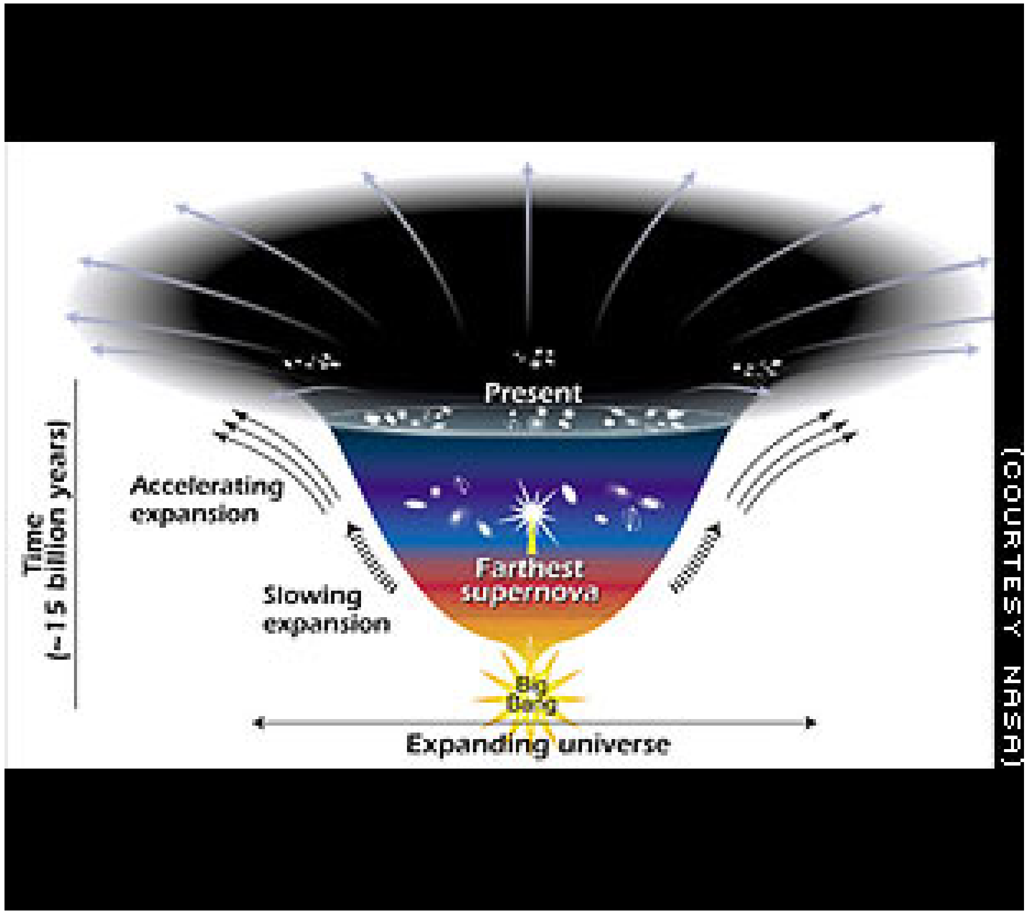
also für $t \to 0$ wieder $R/R_0 \sim t^{2/3}$

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_M} H_0 t\right)^{2/3} \tag{130}$$

Das Alter des Universums wird für $R = R_0$ zu

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_M}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{1-\Omega_M}{\Omega_M}} \tag{131}$$

berechnet, also $H_0 t_0 = 0.77 \cdot 1.33$ für $\Omega_M = 0.25$. Numerisch $t_0 = (13.9 \pm 10\%) \cdot 10^9$ y.


Present
Accelerating expansion
Slowing expansion
Farthest supernova
Big Bang
Expanding universe
Time (~15 billion years)
(COURTESY NASA)