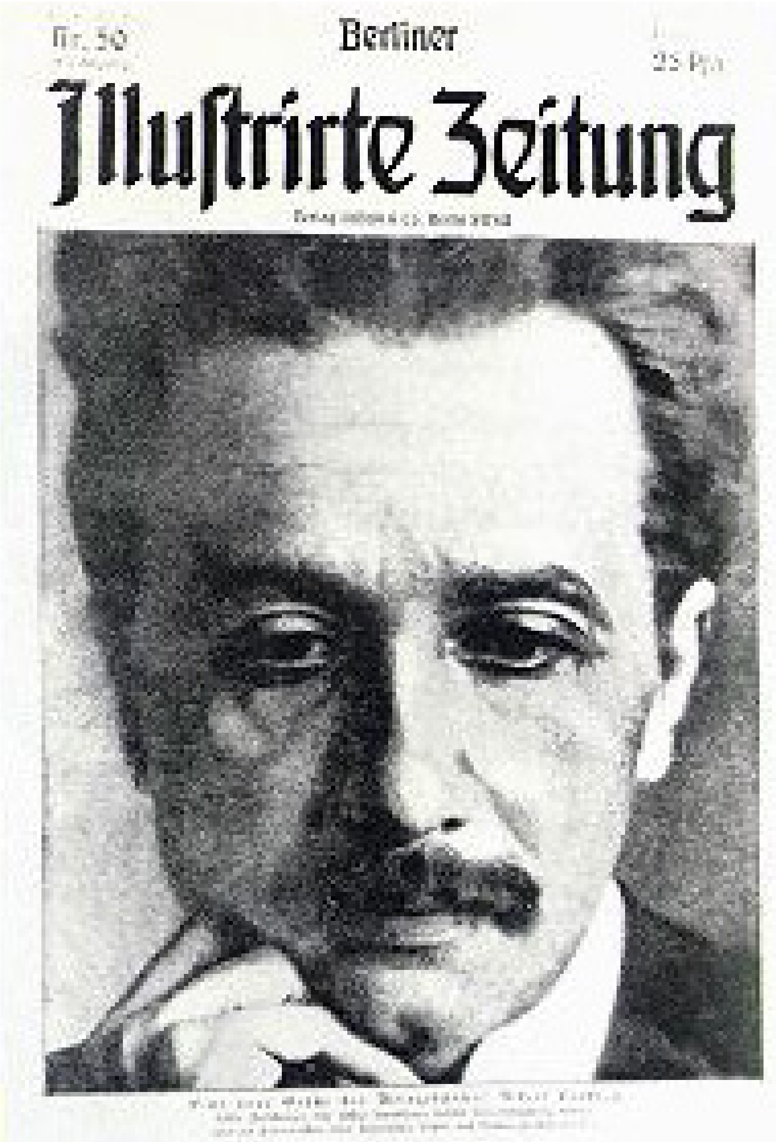
Inhalt der Vorlesung



- Die Friedmann-Lemaitre Gleichungen
- Der Energiesatz
- Die klassische Näherung
- Die kosmologische Konstante

14 Die Friedmann-Lemaitre Gleichungen

Die Dynamik des Universums wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ wird durch die Massendichte ρ bestimmt. Einstein fand, daß man einen Tensor $G^{\mu\nu}$ suchen mußte, der linear in $g^{\mu\nu}$ und seinen zweiten Ableitungen, aber quadratisch in den ersten Ableitungen ist. Die Gleichung für diesen Tensor lautet

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad , \tag{60}$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante und $T^{\mu\nu}$ der Tensor der Energie-Impuls-Dichte ist. Für ein Gas mit n Teilchen lautet er

$$T^{\mu\nu} = \sum_n \frac{p^\mu p^\nu}{W_n} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)) \quad . \tag{61}$$

Mit $T^{00} = \rho\gamma c^2$ steht rechts in (60) offenbar eine kovariante relativistische Verallgemeinerung der Massendichte. Es läßt sich zeigen, daß die gerade aufgestellten Forderungen an die Form von

$G^{\mu\nu}$ genügen, diesen Tensor eindeutig festzulegen. Da $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, gibt es 10 Differentialgleichungen für $g^{\mu\nu}$. Unter der Voraussetzung eines homogenen isotropen Universums gilt die Robertson-Walker-Metrik und die 10 Einsteinschen Gleichungen werden auf 2 Differentialgleichungen für den Skalenfaktor R reduziert. Die erste Gleichung (Friedmann) lautet

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\kappa\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \tag{62}$$

Erläuterung: $k = 0, \pm 1$ Krümmung, R Abstandsskala,$\kappa = 8\pi G$ Gravitation, ρc^2 Energiedichte, Λ Kosmologische Konstante

Die Energiedichte ist relativistisch zu verstehen, hat also die Grenzfälle $\rho_M c^2 = Mc^2/V$ für ruhende Materie und $\rho_R c^2$ für Photonen, wobei $\rho_R c^2$ aus der Planckschen Formel entnommen wird. Später werden andere Formen ultrarelativistischer Materie zu ρ_R hinzugezählt. In einem Universum aus Strahlung und (ruhenden) Galaxien schreiben wir

$$\rho = \rho_M + \rho_R \quad . \tag{63}$$

Die Energiedichte koppelt an die Gravitation, sie kann also klumpen. Im Gegensatz dazu ist Λ an jedem Punkt des Raums gleich. In einem Universum ohne Materie und Strahlung (Vakuum) bleibt nur die kosmologische Konstante übrig, die als Maß der Energiedichte des Vakuums interpretiert werden kann.

Mit der formalen Ersetzung $\rho_V = \Lambda/\kappa$ und $\rho_T = \rho_M + \rho_R + \rho_V$ wird die rechte Seite der Friedmann Gleichung umgeformt, also

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\kappa\rho_T}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \tag{64}$$

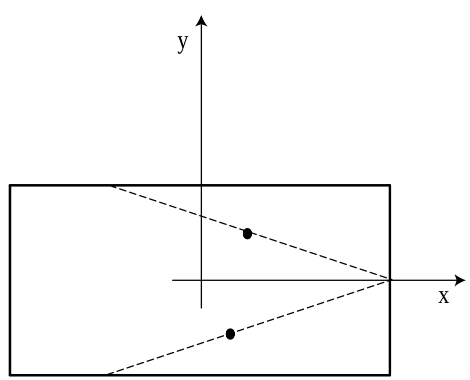
Neben der Friedmann Gleichung gibt es eine zweite fundamentale

Gleichung:

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{\kappa}{6}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \tag{65}$$

Sie beschreibt die Beschleunigung. Auf der rechten Seite steht nicht nur ρ sondern auch der Druck p!

In der AR gibt es zwei Wirkungen des Drucks: die gravitative Wirkung versucht offenbar das Volumen zu verkleinern! Wie in einem Gas gibt es auch eine direkte Wirkung, die versucht, das Volumen zu vergrößern.



In Gasen und Flüssigkeiten (Anzahldichte n) wird dieser Druck zu $p = nP_x v_x$ berechnet.

Nichtrelativistisch: $P_x = mv_x$, also nach Mittelung

$$p_M = \rho_M \frac{v^2}{3} \tag{66}$$

mit der Näherung $v = 0$ für das Universum heute.

Hochrelativistisch gilt mit $cP_x = W\beta_x$

$$p_R = \rho_R \frac{c^2}{3} \tag{67}$$

Mit $p_V = -\rho_V c^2$ kann man (65) in die Form

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{\kappa}{6}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad , \tag{68}$$

bringen, die für alle Dichten und Drücke gleich aussieht. Den allgemeinen Zusammenhang

$$p = w\rho c^2 \tag{69}$$

bezeichnet man als Zustandsgleichung. Die uns interessierenden Sonderfälle erfüllen $w = 0, 1/3, -1$.

15 Der Energiesatz

Die beiden FL-Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch den Energiesatz verknüpft. Um dies zu zeigen, wird (64) mit R^3 multipliziert und nach der Zeit abgeleitet.

$$\dot{R}(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2) = \frac{\kappa}{3}\frac{d}{dt}(\rho R^3) \quad . \tag{70}$$

Die linke Seite wird mit Hilfe von (64) und (68) zu $-\kappa p R^2/c^2$ umgeformt und am Ende steht

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3 c^2) = -p\frac{d}{dt}(R^3) \quad . \tag{71}$$

Das ist der Energiesatz in der Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik $dU = -pdV$.

Er ist in der Kosmologie für einen mitbewegten Beobachter in einem Element der kosmischen Flüssigkeit formuliert. Wir behalten (65) und (71) als Grundgleichungen und benutzen den Energiesatz (71) zum Ableiten von

Beziehungen zwischen ρ und R.

- $\rho = \rho_M$ führt mit $p = 0$ zu $\rho_M R^3 = \mathrm{const}$ oder

$$\frac{\rho_{M,0}}{\rho_M} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \tag{72}$$

- $\rho = \rho_R$ führt mit $p = \rho_R c^2/3$ zu

$$\frac{\rho_{R,0}}{\rho} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \tag{73}$$

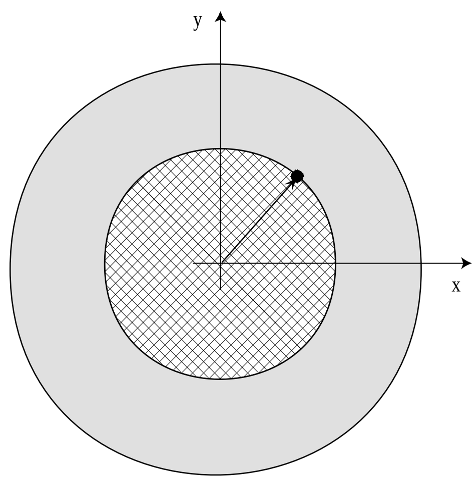
  Dies kann man auch mit Hilfe des Photonenbildes und der Rotverschiebung beweisen!

- $\rho_V = \rho_{V,0} = \mathrm{const}$ führt zu

$$p = -\rho_V c^2 \tag{74}$$

  als Bestätigung des früheren Ansatzes.

16 Die klassische Näherung



Klassisch wird die Bewegung einer Galaxie der Masse m im Abstand R (der schwarze Punkt in der Abbildung) durch

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -m\frac{GM(R)\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{75}$$

beschrieben. Hierbei ist M die Masse in der Kugel zwischen Erde und Galaxie. Bei Vernachlässigung der tangentialen Geschwindigkeit (Hubble!) gilt

$$\dot{v}_R = \ddot{R} \tag{76}$$

und daher

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\kappa}{6}\rho_M R \ , \tag{77}$$

wie in (65) mit $p = \Lambda = 0$. Als nächstes bilden wir das Wegintegral:

$$m \int \ddot{R} dR = -m \frac{\kappa}{6} \int \rho_M R dR \tag{78}$$

ergibt mit

$$\rho_M R^3 = \rho_{0,M} R_0^3 \tag{79}$$

den Energiesatz für eine Testmasse m

$$m \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{GmM}{R} = \mathrm{const} \tag{80}$$

also $W_{\mathrm{kin}} + W_{\mathrm{pot}} = W$. Hieraus gewinnen wir die Friedmann-Gleichung (64)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{2W}{mR^2} = \frac{\kappa}{3} \rho_M \quad , \tag{81}$$

wobei $2W/mc^2$ anstelle des Parameters k tritt.

17 Die kosmologische Konstante

Die physikalische Bedeutung der kosmologischen Konstante ist schwierig zu erfassen. Sie ist ohne Entsprechung in der Newtonschen Mechanik. Einstein untersuchte ein statisches Modell (Eddington: matter without motion) des Universums, $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ und $\rho = \rho_M$. Aus (64) und (68) folgt dann

$$\frac{kc^2}{R^2} = \frac{\kappa \rho_M}{3} = -\frac{\kappa p_M}{c^2} \quad , \tag{82}$$

also ein negativer Druck, ein physikalisch sinnloses Resultat. Die kosmologische Konstante folgt aus der allgemeinsten Modifikation der ursprünglichen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, die widerspruchsfrei möglich ist. Zunächst erlaubt sie ein (heute nicht mehr interessantes) statisches Modell. Mit $p_M = 0$ folgt aus (68)

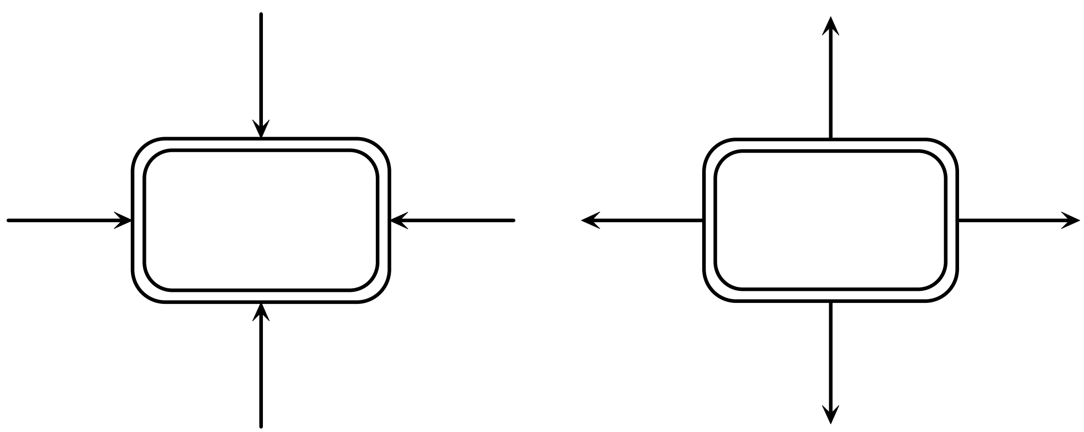
$$\rho_M = 2\rho_V = \frac{2\Lambda}{\kappa} \tag{83}$$

und aus (64)

$$\rho_V = \frac{kc^2}{\kappa R^2} \tag{84}$$

oder $R = c/\sqrt{\Lambda}$ für $k = 1$.

In der AR trägt der Druck zur Gravitation bei (siehe (68)). Die kosmologische Konstante bewirkt eine positive Beschleunigung ($\ddot{R}$) und daher einen Zug anstelle eines Drucks auf ein Volumenelement der kosmischen Flüssigkeit. Dies ist links und rechts in der Abbildung dargestellt.



Von innen: Der positive (negative) Druck im Inneren eines Elements bewirkt Abbremsung (Beschleunigung).

Die Wechselwirkung mit dem Vakuum ergibt eine abstoßende Kraft zwischen zwei Testmassen. Mit $\ddot{R}_\Lambda = \Lambda R/3$ folgt für kleine Abstände d zu einer Masse M im Zentrum des KS

$$\ddot{d} = \frac{\Lambda}{3} d \tag{85}$$

also zusammen mit der Newtonschen Gravitation

$$\ddot{d} = \frac{G}{d^2}\left(\frac{8\pi}{3}\rho_V d^3 - M\right) \quad , \tag{86}$$

d.h. eine Korrektur an der Masse M.

Am meisten überrascht aber, daß nun eine Ausdehnung des Weltalls völlig ohne Materie möglich ist (de Sitter 1917, motion without matter).

Mit $\rho_M = \rho_R = 0$ wird wird (62) für $k = 0$ zu

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \tag{87}$$

umgeformt, also

$$R \sim \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \tag{88}$$

eine exponentielle Expansion!

Die gemessene Beschleunigung der Ausdehnung wird quantitativ durch $\rho_V = \mathcal{O}(\rho_M)$ mit $\rho_M \approx 10^{-26}$ kg/m^3 erklärt (Kapitel 18). Dieser sehr kleine, aber von null verschiedene Wert ist sehr schwer zu interpretieren.

a) Der natürliche Wert von ρ_V sollte nur durch G und $\hbar, c$ bestimmt werden. c^4/G hat Dimension der Kraft, also $\hbar c c^4/G$ Dimension von Energie^2. Diese Energie ist die Planck-Energie

$$W_{\text{Pl}} = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} \tag{89}$$

das sind $\approx 2 \cdot 10^9$ Ws oder $1.22 \cdot 10^{19}$ GeV. $W_{\text{Pl}}^4/(\hbar c)^3$ hat die Dimension einer Energiedichte, also

$$\rho_{\mathrm{V,Pl}} = \frac{c^5}{G^2\hbar} \approx 3 \cdot 10^{96}\mathrm{kg/m^3} \quad , \tag{90}$$

das ist um 123 Größenordnungen daneben.

b) Jede Art Vakuumenergie gibt einen Beitrag von $\kappa\rho_V$ zur kosmlogischen Konstanten. Hiermit bergibt sich sofort ein ernstes Problem, denn in der Quantentheorie ist das Vakuum wegen $\Delta W \Delta t = \hbar$ nicht leer, sondern von virtuellen Teilchenpaaren erfüllt. Der Hamilton-Operator der Theorie ist durch ein Integral über Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{k}$ bestimmt. Dieses Integral enthält einen unendlichen Anteil, der als Energiedichte des Vakuums interpretiert werden kann. Mit dem Argument, daß die beobachtbaren Größen Differenzen von Energien enthalten, läßt sich der divergente Anteil eliminieren. Dieses Argument trifft aber für die Gravitation (60) nicht zu. Um einen definierten Wert zu erhalten, wird die Integration bei $|\boldsymbol{k}| = 1/\sqrt{G}$ abgeschnitten und man erhält $\rho_V = 1/(8\pi^2 G^2)$ in Einheiten $\hbar = c = 1$.

c) In supersymmetrischen Modellen der Elementarteilchenphysik gehört zu jedem Fermion ein Boson mit bis auf den Spin gleichen Quantenzahlen. Besonders interessant ist nun die Beobachtung, daß die divergenten Integrale sich für Bosonen und Fermionen im Vorzeichen unterscheiden. In einer exakt supersymmetrischen Welt gilt demnach $\rho_V = 0$. Die Supersymmetrie ist offenbar gebrochen. Falls sie bei einer Schwelle von $\lambda_S \approx 1000$ GeV einsetzt, gilt $\rho_{V,S} \approx \lambda_S^4$, was die Diskrepanz auf 60 Größenordnungen mildert.

d) Die Elementarteilchenphysik kennt andere Quellen von Vakuumenergie, z.B. das Higgs-Feld ($\lambda_H \approx 100$ GeV), die Skalenkonstante der Quanmtenchromodynamik ($\lambda_{\text{QCD}} \approx 100$ MeV). Eine Möglichkeit der Kompensation besteht in der Annahme einer passend adjustierten Einsteinschen kosmologischen Konstanten, deren Wert durch die Bedingung eingeschränkt wird, daß im Universum intelligentes Leben ermöglicht wird (anthropisches Prinzip).

e) Wir werden die zeitliche Entwicklung von R über 30 Größenordnungen verfolgen. Dabei ändert sich die Energiedichte der Strahlung um 120 Größenordnungen, während ρ_V konstant bleibt. Der Anfangswert von ρ_V muß also auf 120 Dezimalstellen genau eingestellt werden! Das ist das sog. fine tuning problem.

Die Natur der kosmologischen Konstanten ist das vielleicht wichtigste ungelöste Problem der modernen Physik. Es werden viele Ansätze diskutiert: anthropisches Prinzip, Supergravity, Quintessenz, Multi-Universen....