Inhalt der Vorlesung

- Das Hubble Gesetz in der AR
- Die Rotverschiebung in der AR
- Der Luminositätsabstand in der AR

11 Das Hubble Gesetz in der allgemeinen Relativitätstheorie

Um die beschleunigte Bewegung von Massen mit hohen Geschwindigkeiten zu behandeln, braucht man die Allgemeine Relativitätstheorie. Grundlage ist Einsteins Äquivalenzprinzip:

In einem (kleinen) frei fallenden KS sind die Gesetze der Physik identisch zu denen eines unbeschleunigten Systems ohne Gravitation.

Angewandt auf die Gravitation ergibt dies die prinzipielle Gleichheit von träger und schwerer Masse.

In der Newtonschen Theorie (Fadenpendel, Exp. von Eötvös) ist dies eine Beobachtung, aber kein dynamisches Prinzip.

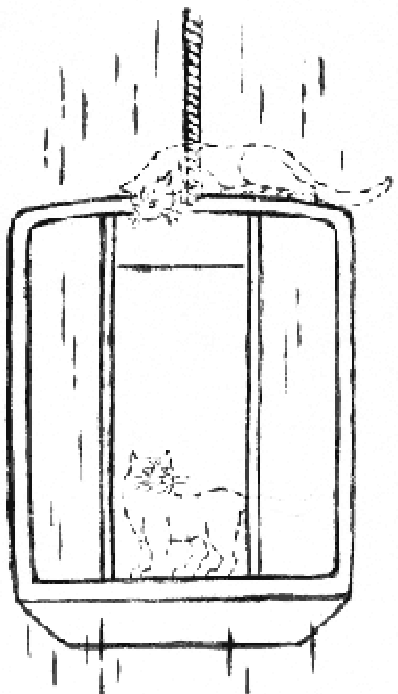
Wir wählen ein einfaches Beispiel aus der klassischen Physik, freier Fall im Schwerefeld der Erde ($v \ll c$). Mit $m_t \neq m_g$ gilt

$$m_t \ddot{z} = -m_g g \quad . \tag{35}$$

Die Transformation zwischen 2 KS, die für $t = 0$ im Ursprung zusammenliegen, lautet

$$z = z' + \frac{a_0}{2} t^2 \quad , \tag{36}$$

worin a_0 die Beschleunigung des Systems (') ist.



Schrödingers Katze in
Einsteins Fahrstuhl

Speziell Katze im Fahrstuhl:

$$z' = z + \frac{1}{2} \frac{m_{g,F}}{m_{t,F}} g t^2 \tag{37}$$

bzw. die Katze im Labor

$$m_{t,K} \ddot{z} = -m_{g,K} \, g \tag{38}$$

also

$$\ddot{z}' = \left(\frac{m_{g,F}}{m_{t,F}} - \frac{m_{g,K}}{m_{t,K}} \right) g \quad . \tag{39}$$

Das Äquivalenzprinzip fordert $\ddot{z}' = 0$, das geht nur mit $m_t = m_g$.

Einschalten der Gravitation ist äquivalent zum Wechsel des KS!

Die Gravitation ein geometrischer Effekt? Einstein schrieb

$$\ddot{z} = -g \tag{40}$$

in der Form ($ds = d\tau$ und $\tau \approx t$ für kleine Geschw.)

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\Gamma^3_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \tag{41}$$

als Spezialfall der allgemeinen Formel

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \tag{42}$$

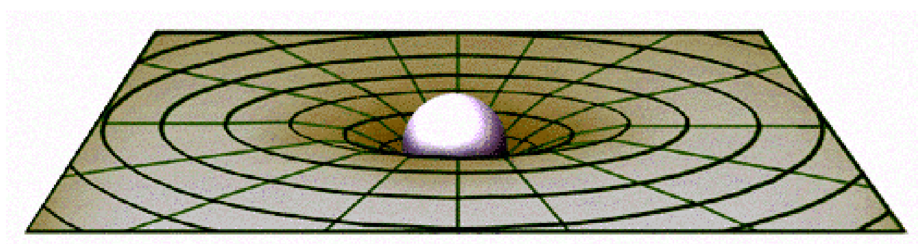
mit der affinen Verknüpfung

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \quad . \tag{43}$$

Entscheidend ist nun die Erkenntnis aus der affinen Geometrie, daß die affine Verknüpfung eindeutig durch die partiellen Ableitungen $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}$ des metrischen Tensors festgelegt ist.

In der allgemeinen Relativitätstheorie hängen die Komponenten des metrischen Tensors von der Zeit und der Massenverteilung im Raum ab!

Die AR ist eine allgemeine Theorie von Raum und Zeit und gibt eine geometrische Deutung der Gravitation!

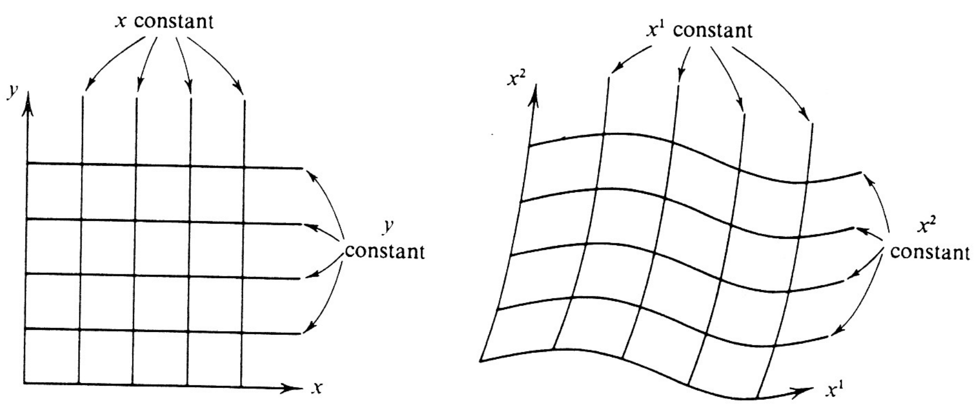


Aufgrund der Ortsabhängigkeit der Metrik werden die

Koordinaten krummlinig und die Berechnung von

$$\Delta s = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \ , \tag{44}$$

kann sehr kompliziert werden.



Aber: An jedem Punkt kann ein lokales Minkowski-System definiert werden. Lokal gelten die gewohnten Gesetze wie z.B. der Satz von der Energieerhaltung!

In bestimmten Fällen wird die Metrik der AR relativ einfach wie z.B. in der Umgebung einer einzelnen Masse (Schwarzschild) oder für ein homogenes, isotropes Universum. Hier gilt für mitbewegten Beobachter die Robertson Walker Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta d\phi^2 \right) \tag{45}$$

Hierin sind:

Θ, ϕ Winkel eines Polarkoordinatensystems

r dimensionslose Radialkoordinate

k Parameter der Raumkrümmung, $k = 0, \pm 1$

$R(t)$ Skalenparameter ([Länge]), der von der universellen Zeit t abhängt.

Für Galaxie mit $\Theta = \phi = 0$ läßt sich der Eigenabstand zu einem Beobachter im Zentrum des KS einfach definieren

$$D_p = R(t) \int_0^{r_1} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}} dr \quad . \tag{46}$$

Die Eigengeschwindigkeit wird durch $\dot{D}_p(t)$ berechnet

$$v = D_p \frac{\dot{R}}{R} \quad . \tag{47}$$

Mit der Definition $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ und dem Index "0" für Zeiten heute folgt

$$v_0 = H_0 D_{p,0} \tag{48}$$

als präzise Formulierung des Hubble-Gesetzes in der AR.

Grundlage des Gesetzes ist allein die RW-Metrik. In der AR gibt es daher (im Gegensatz zur Meinung vieler Bücher) keine Beschränkung auf $v_{\max} = c$. Das ist kein Widerspruch zur SR, da es sich nicht um eine Geschwindigkeit eines Körpers im Inertialsystem eines Beobachters handelt.

Im Urknall explodiert die Materie nicht in den Raum hinein, sondern der Raum selbst explodiert.

12 Rotverschiebung in der AR

Um Kontakt mit den Beobachtungen herzustellen, betrachten wir Licht, das von der Galaxie zur Zeit t_1 ausgesandt wird. Mit $ds^2 = 0$ folgt unter Beachtung des Vz. beim Laufen von r_1 zum

Ursprung des KS

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c}{R(t)} dt = -\int_{r_1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}} dr \tag{49}$$

Die gleiche Beziehung gilt auch eine Schwingungsdauer später also $\int_{t_1}^{t_0}(c/R)dt = \int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0}(c/R)dt$. Das letzte Integral zerlegen wir in $\int_{t_1}^{t_0} - \int_{t_1}^{t_1+T_1} + \int_{t_0}^{t_0+T_0}$. Da T_1 und T_2 sehr klein sind erhalten wir nun $R_1/T_1 = R_0/T_0$ und mit $T_1/T_0 = \lambda_1/\lambda_2$ folgt

$$\frac{R(t=0)}{R(t=t_1)} = 1 + z \tag{50}$$

Die Rotverschiebung mißt das Verhältnis der Skalenparameter zu verschiedenen Zeiten. Die Wellenlänge wird größer, weil sich der Raum ausdehnt!

Für kleine Zeitunterschiede $\Delta t = t_0 - t_1$ gilt die Entwicklung

$$R(t_1) = R(t_0) - \dot{R}(t_0)\Delta t = R_0(1 - H_0\Delta t) \tag{51}$$

also

$$z = H_0 \Delta t \quad . \tag{52}$$

Da aber für kleine Zeitintervalle (49) in $c\Delta t = D_p$ umgeformt werden kann, wird mit dem Hubble-Gesetz (48) der Zusammenhang

$$v = cz \tag{53}$$

der speziellen Relativitätstheorie gewonnen.

In der Teilnahme an der allgemeinen Expansion werden Galaxien lokal als ruhend angenommen ($r = \mathrm{const}$). Daneben können Sie aber noch Eigenbewegungen haben und die gesamte Geschwindigkeit in Richtung des Beobachters ist durch die Summe der Expansions- und der besonderen (peculiar) Geschwindigkeit

$$v = v_{\mathrm{exp}} + v_{\mathrm{pec}} \tag{54}$$

gegeben, wobei letztere durch den Dopplereffekt der SR gemessen wird.

13 Luminositätsabstand in der AR

Die von der Galaxie ausgehende Kugelwelle hat zur Zeit t_0 die Oberfläche $4\pi/r_1^2 R_0^2$. Die Energie der Photonen und ihre Rate beim Eintreffen haben um den Faktor R_0/R_1 abgenommen, also

$$l = \frac{L}{4\pi r_1^2 R_0^2} \frac{R_1^2}{R_0^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad . \tag{55}$$

r_1 kann aus der linken Seite von (49) berechnet werden, wenn man $R(t)$ kennt. Es gilt immer die Näherung

$$d_L = \frac{zc}{H_0}\left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z\right) \tag{56}$$

mit dem Parameter der Beschleunigung

$$q_0 = \frac{-1}{H_0^2}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)_0 \quad . \tag{57}$$

Für kleine z also auch hier

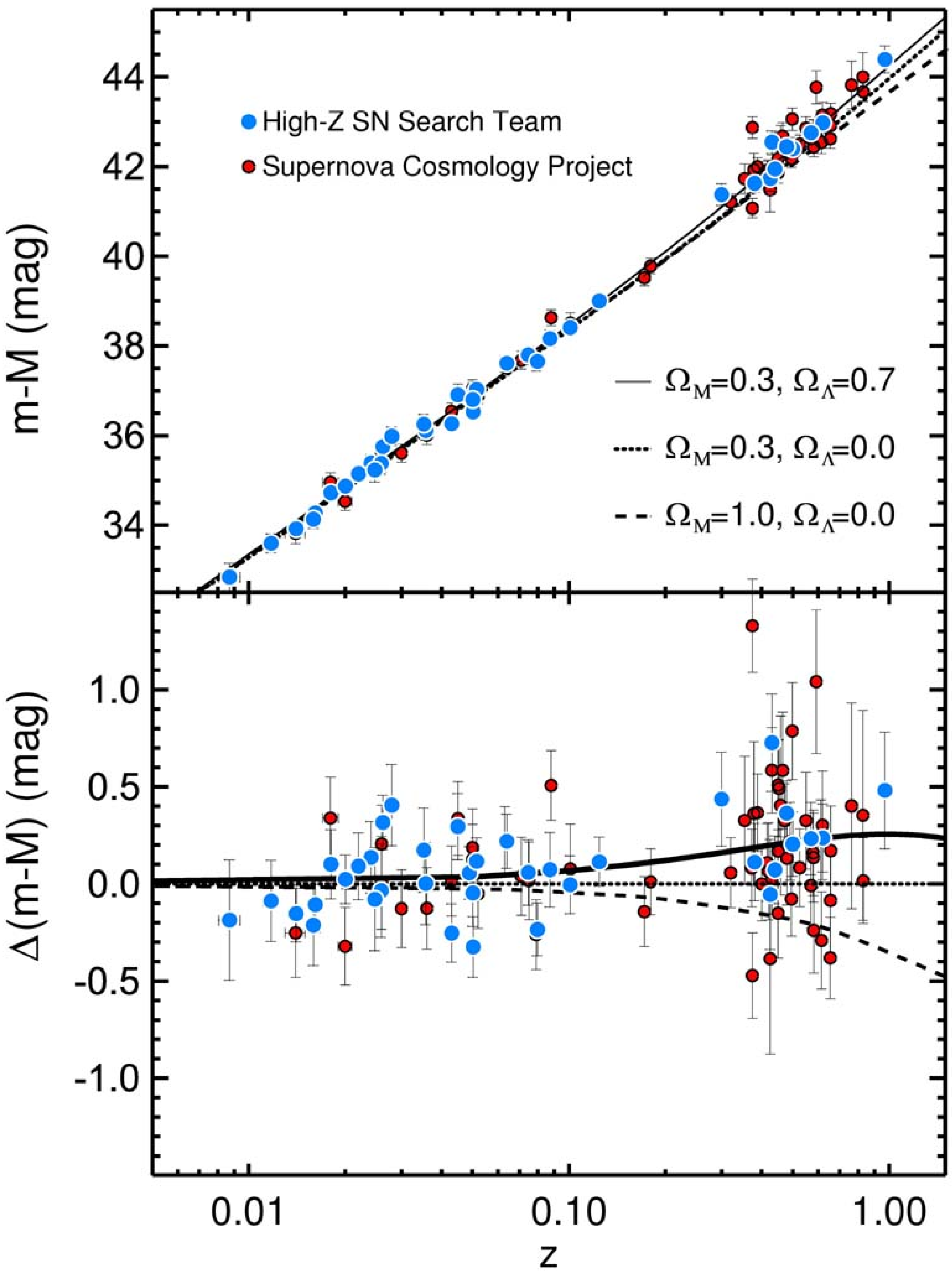
$$d_L = \frac{zc}{H_0} \tag{58}$$

bzw. $v = d_L H_0$. Der Beweis von (56) erfolgt, indem man die rechte Seite von (49) durch r_1 annähert und die linke Seite mit Hilfe von (51) durch $(\Delta t + H_0 \Delta t^2/2)c/R_0$ ersetzt. Dann wird (51) bis zur 2. Ordnung angeschrieben und daraus eine Formel für Δt als Funktion von z ermittelt. Nach einigen Rechenschritten gelangt man so zu (56). Die Beziehung läßt sich aber auch an den später behandelten Modellen für $R(t)$ verifizieren.

Die Astronomen messen Größenklassen als Funktion von z, also

$$m - M = 52.38 - 5\log H_0 + 5\log z + 1.086(1-q_0)z + ... \tag{59}$$

für nicht zu große z. H_0 in Einheiten von km/s/Mpc.



High-Z SN Search Team
Supernova Cosmology Project
Ω_M=0.3, Ω_Λ=0.7
Ω_M=0.3, Ω_Λ=0.0
Ω_M=1.0, Ω_Λ=0.0
m-M (mag)
34
36
38
40
42
44
Δ(m-M) (mag)
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
0.01
0.10
1.00
z