

Astronomie und Astrophysik II

SS 2006 ^a

Christoph Berger / Frank Raupach

RWTH-Aachen

Physikalisches Institut Ib

Email: frank.raupach@cern.ch

Email: berger@rwth-aachen.de

April 13, 2006

^aInstitut Ib, RWTH-Aachen

2 Strukturen im Universum

In diesem Kapitel statistischer Diskussionen bezeichnen wir den Mittelwert von ρ_M , der Materiedichte im Universum, mit $\bar{\rho}$. Sie beträgt etwa $3 \cdot 10^{-28} \text{kgm}^{-3}$, wie wir gesehen haben. Das kosmologische Prinzip setzt ein homogenes Universum voraus. Der CMB, der den Zustand des Universums bei $z = 1100$ widerspiegelt, entspricht dieser Bedingung sehr gut mit Fluktuationen $\Delta T/T = \mathcal{O}(10^{-5})$. Dem entsprechen Fluktuationen der Materiedichte, die modellabhängig 10 bis 100mal größer sind. (Aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz würde $d\rho/\rho = 4dT/T$ folgen, zum Zeitpunkt der Entkopplung ist aber das Universum schon materiedominiert.) Die Dichte in einer Galaxie ist demgegenüber $\approx 10^5 \bar{\rho}$ und die Dichte in einem Galaxiencluster immer noch zwischen $2\bar{\rho}$ und $20\bar{\rho}$. Dieser Übergang von einem sehr homogenen in ein ziemlich klumpiges Universum muß erklärt werden. Diese Erklärung kann nur statistisch erfolgen, da kein Modell z.B. jemals vorhersagen kann, in 770 kpc Abstand von der

Galaxis, den Andromeda-Nebel zu finden.

2.1 Maße der Inhomogenität

Zum Beginn der quantitativen Diskussion definieren wir die Dichtekontrastfunktion

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (68)$$

in Abhängigkeit von einer Koordinate \mathbf{x} im Universum. Wir bilden daraus die Zweipunkt-Autokorrelationsfunktion

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (69)$$

Die eckigen Klammern bedeuten eine Mittelung über Ensemble, hier also viele Universen. Wir haben aber nur ein Universum zur Verfügung. Da es statistisch isotrop sein muß, kann ξ nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängen und die Mittelung über Universen kann durch eine Mittelung über alle gleichen Abstände r im Volumen unseres Universums ersetzt werden (Ergodizitätshypothese).

Die Zweipunkt-Autokorrelationsfunktion ist ein typisches Verfahren, Strukturen zu untersuchen. Die Wahrscheinlichkeit dP , eine Galaxie im Volumenelement dV zu finden wird aus

$$dP = \bar{n}dV \quad (70)$$

berechnet mit der mittleren Anzahldichte $\bar{n} = N/V$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine Galaxie in dV_1 und eine zweite in dV_2 mit dem Abstand r zu finden, durch

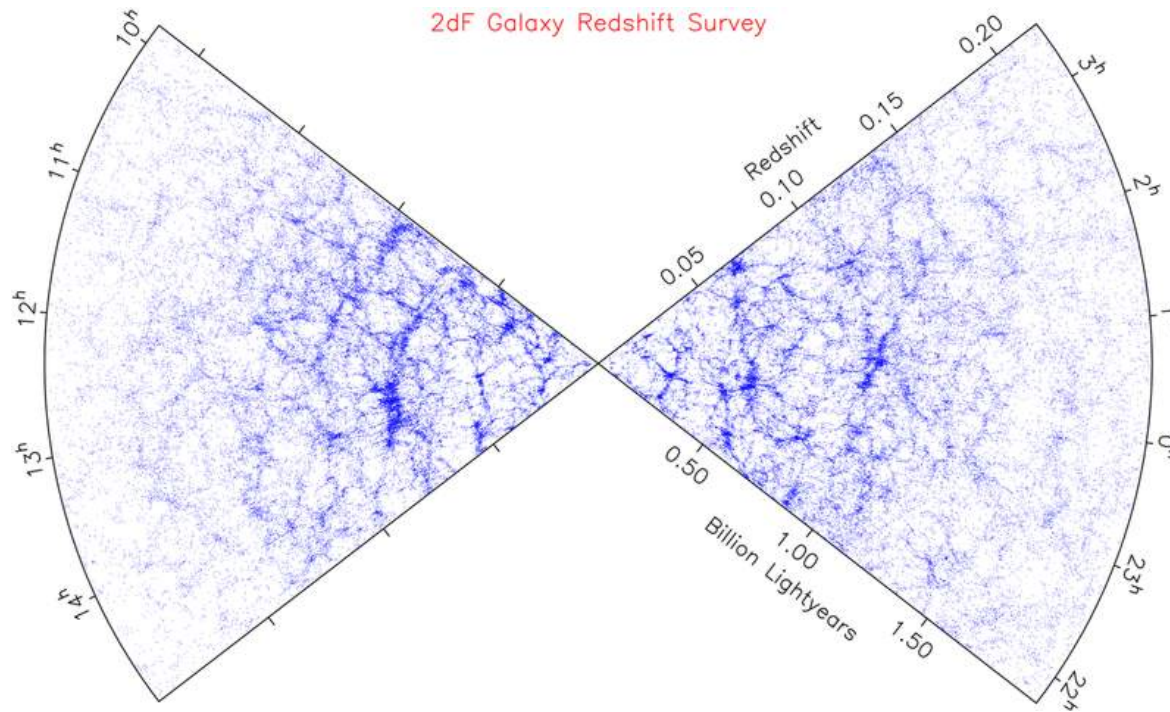
$$dP_{12} = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 (1 + \xi(r)) \quad (71)$$

gegeben. Hierbei wurde noch die plausible Annahme gemacht, daß Anzahldichte und Dichte zueinander proportional sind, man kann aber auch die Massenkorelation getrennt von der Korrelation der Anzahldichte behandeln. Mit $\xi(r) = 0$ folgt offenbar das richtige Ergebnis für eine Gleichverteilung. Besonders wichtig ist $\xi(0)$,

$$\delta^2 = \xi(0) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) \rangle \quad , \quad (72)$$

das ist die Varianz der (relativen) Dichte bei Mittelung über das gesamte Volumen des Universums.

Die Datenbasis für die statistischen Untersuchungen wird durch die schon im WS vorgestellten großen **Galaxien-Surveys** gebildet.



Die weitere Diskussion erfolgt im Fourierraum,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \tilde{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k . \quad (73)$$

Hierin ist \mathbf{k} der Vektor der Wellenzahl, $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$. Die inverse Transformation lautet:

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x \quad . \quad (74)$$

Um Probleme mit dem endlichen Volumen des Weltalls zu umgehen, wird die Fouriertransformation häufig als Fourierreihe angegeben. Dieses Problem beiseite schiebend schreiben wir

$$\langle \delta^*(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \langle I \rangle \quad (75)$$

mit

$$I = \int \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \tilde{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k d^3k' \quad . \quad (76)$$

Die Verwandlung eines Produkts von Integralen in ein Doppelintegral ist erlaubt, da die Integrale nur von \mathbf{k} bzw \mathbf{k}' abhängen. Wir setzen an, daß die Koeffizienten $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ im statistischen Sinne unkorreliert, also ihre Phasen zufällig verteilt sind. Bei Wiederholung der Analyse in mehreren voneinander

unabhängigen Universen (leider nicht möglich) erwarten wir daher (δ_D ist die Diracsche- δ -Funktion)

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') |\delta_k|^2 \quad , \quad (77)$$

wobei auf der rechten Seite die Abkürzung $|\delta_k|^2 = \langle |\tilde{\delta}(\mathbf{k})|^2 \rangle$ benutzt wurde. Wenn wir nun auf der linken Seite von (75) über den Raum und auf der rechten Seite über die (gedachten) Ensemble mitteln, erhalten wir (mit $\delta^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$)

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_k|^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \quad . \quad (78)$$

Jetzt nutzen wir noch die Isotropie aus, indem wir ein KS in die Richtung von \mathbf{k} legen und über die Winkel Θ, ϕ mit dem Resultat

$$\xi(r) = \frac{V}{2\pi^2} \int |\delta_k|^2 \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk \quad (79)$$

integrieren. Damit gilt

$$\delta^2 = \frac{V}{2\pi^2} \int |\delta_k|^2 k^2 dk \quad , \quad (80)$$

oder

$$\delta^2 = \frac{V}{2\pi^2} \int |\delta_k|^2 k^3 d \ln k \quad . \quad (81)$$

Der Integrand mit Vorfaktor (manchmal auch als Leistungsspektrum bezeichnet)

$$\Delta^2 \equiv \frac{V}{2\pi^2} |\delta_k|^2 k^3 \quad (82)$$

des letzten Integrals beschreibt den Beitrag zu δ^2 aus einem logarithmischen Intervall von dk . Eine anschaulichere Bedeutung wird durch die Verknüpfung mit

$$\sigma_\lambda^2 = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}) \rangle_V \quad , \quad (83)$$

also die Varianz der Dichte in einem Volumen $\mathcal{O}(\lambda^3)$ unseres

Universums gewonnen. Eine genauere Definition von σ_λ lautet

$$\sigma_\lambda^2 = \left\langle \left(\int \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d^3 r \right)^2 / V_W^2 \right\rangle , \quad (84)$$

worin $W(\mathbf{r})$ eine Funktion ist, die das Fenster mit dem Volumen V_W beschreibt, in dem die Untersuchung stattfindet. Häufig wird z.B. eine Kugel mit scharfer Begrenzung genommen $W(r) = 1$ für $r < r_0$ und $W(r) = 0$ für $r > r_0$. Im Fourier-Raum ergibt sich nach einigen Umformungen wie weiter oben

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{V_W^2} \int \Delta^2(k) |W(k)|^2 \frac{dk}{k} . \quad (85)$$

Zum Auswerten des Integrals muß man noch eine Annahme über die k -Abhängigkeit des Leistungsspektrums $|\delta_k|^2$ machen. Es ist üblich, ein Potenzgesetz

$$|\delta_k|^2 \equiv P(k) = \frac{A}{V} k^n , \quad (86)$$

also

$$\Delta^2 = \frac{A}{2\pi^2} k^{3+n} \quad (87)$$

anzusetzen, welches unter der Annahme zufällig verteilter Fluktuationen abgeleitet werden kann. Das sogenannte PHZ-Spektrum ^a mit dem spektralen Index $n = 1$ wird in der Inflationstheorie begründet. Mit $n = 1$ findet man

$$\sigma_\lambda = \frac{\delta M}{M} \approx \Delta(k = 1/r_0) \quad (88)$$

In den Tabellen gibt es meist eine Angabe über σ_8 , also die Massenfluktuation in einer Kugel mit dem Radius $8h^{-1}$ Mpc, das ist die Skala von Superclustern. Der neueste Wert ist $\sigma_8 = 0.84 \pm 0.04$. Hierdurch wird die Normierung des Leistungsspektrums festgelegt. Durch Messung der Fluktuationen in Abhängigkeit vom Volumen kann die Gültigkeit von (86) überprüft werden.

^afür die Autoren Peebles, Harrison, Zeldowich

Auf Skalen von 50 Mpc und mehr hat der spektrale Index in guter Näherung den Wert 1, z.B. $n = 0.93 \pm .03$ bei $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$. Auch die Autokorrelationsfunktion genügt empirisch einem einfachen Gesetz, $\xi(r) = (r/r_0)^{-1.8}$ und $r_0 = 5h^{-1} \text{ Mpc}$ bei Abständen $0.2 < r < 30 \text{ Mpc}$.

2.2 Fluktuationen und Inflation

Um die Vorhersagen der Inflation bezüglich der Inhomogenitäten zu untersuchen, betrachten wir den Horizont als Funktion von R . Als Horizont definieren wir hier in Anlehnung an die Diskussion des Zeitpunkts der Entkopplung der Neutrinos (Kap. 34) im letzten Semester c/H , da es nun auf die durch mikrokausale Prozesse verknüpfte Strecke ankommt. c/H ist die Strecke, die das Licht in einer Zeit zurücklegt, in der R um $\Delta R = R$ anwächst. Für MD und RD Universen ist das Resultat äquivalent zur

Auswertung von (52)

$$\frac{c}{H} = \frac{c}{\sqrt{\Omega_M} H_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2}, \text{MD} \quad (89)$$

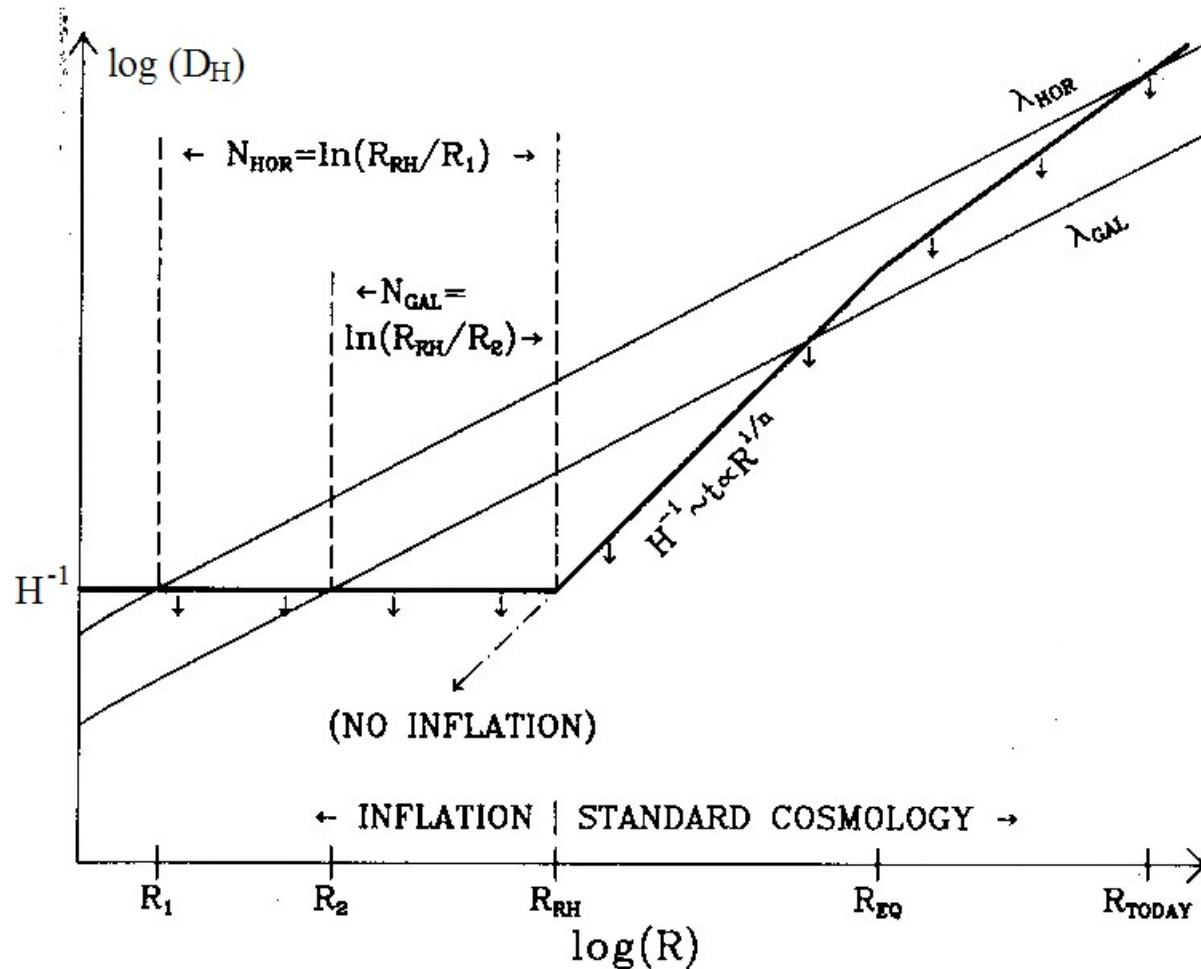
$$\frac{c}{H} = \frac{c}{\sqrt{\Omega_R} H_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2, \text{RD} \quad (90)$$

aber im inflationären Universum gib es einen drastischen Unterschied: Der mikrokausale Horizont steigt nicht exponentiell an, sondern ist konstant!

$$\frac{c}{H} = \frac{c}{\sqrt{\Lambda_G/3}} = \frac{c}{H_{\text{infl}}}, \text{INFL} \quad (91)$$

Diese Verhältnisse sind in der Abbildung (entnommen aus dem Buch **The Early Universe** von Kolb/Turner) qualitativ dargestellt. Im Gegensatz zur Kosmologie ohne Inflation sind kleine Skalen immer innerhalb des Horizonts, während große Skalen in der Inflationsepoche innerhalb des Horizonts sind, ihn dann verlassen,

und später wieder eintreten. Da die inflationäre Epoche sich über viele (in der Abb. nicht gezeigte Dekaden) nach links erstreckt, wird auch klar, daß die Skalen des sichtbaren Universums nur einen winzigen Ausschnitt aus dem gesamten Spektrum



darstellen. Es gilt die Regel **First out, last in**. Weil die Skalen, die heute von kosmologischem Interesse sind (1 bis 10000 Mpc), in der Inflationsepoche nahe bei einander liegen, setzen wir an, daß die zugehörigen Dichtefluktuationen die gleiche Amplitude haben. Außerhalb des Horizonts sind diese Fluktuationen eingefroren, da kein kausaler Kontakt mehr vorliegt (eine genauere Begründung ist in Modellrechnungen möglich). Die Inflation sagt also Fluktuationen gleicher Amplitude beim Wiedereintritt in den Horizont voraus. Eine Fluktuation σ_{λ_1} , die heute bei der Skala λ_1 gemessen wird, ist bei einem Wert R_1 des Skalenparameters mit der Amplitude A innerhalb des Horizonts gelangt. Wir werden später sehen, daß die Fluktuationen innerhalb des Horizonts $\sim R/R_0$ anwachsen. Daher

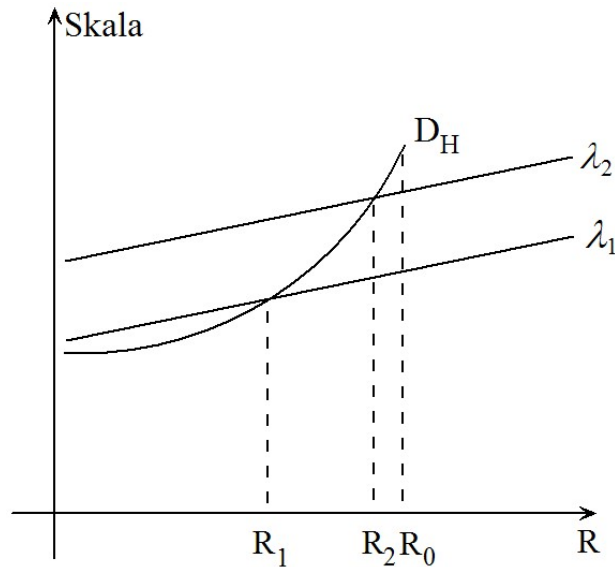
$$\sigma_{\lambda_1} = A \frac{R_0}{R_1} \quad (92)$$

und mit einer entsprechenden Relation für eine Fluktuation σ_{λ_2}

gilt

$$\frac{\sigma_{\lambda_1}}{\sigma_{\lambda_2}} = \frac{R_2}{R_1} , \quad (93)$$

da A nach Voraussetzung für beide Skalen gleich ist.



Die Masse innerhalb des Horizonts ist durch $M_H = \rho_H D_H^3$ gegeben. In der MD skaliert $\rho_H \sim R^{-3}$ und $D_H \sim R^{3/2}$, also $M_H \sim R^{3/2}$

und

$$\frac{\sigma_{\lambda_1}}{\sigma_{\lambda_2}} = \left(\frac{M_{H,2}}{M_{H,1}} \right)^{2/3} . \quad (94)$$

Nun entspricht beim Eintritt M_H jeweils der zu einer bestimmten

Skala gehörigen Masse M_λ , die aber unabhängig von R/R_0 ist,

$$\left(\frac{M_{H,2}}{M_{H,1}}\right)^{2/3} = \left(\frac{M_{\lambda,2}}{M_{\lambda,1}}\right)^{2/3} . \quad (95)$$

Mit $M_\lambda \sim \lambda^3$ gewinnen wir demnach die Vorhersage

$$\sigma_\lambda \sim \frac{1}{\lambda^2} , \quad (96)$$

und wegen $\sigma_\lambda^2 \sim |\delta_k|^2 k^3$ ergibt sich $|\delta_k|^2 \sim k$, d.h. $n = 1$.

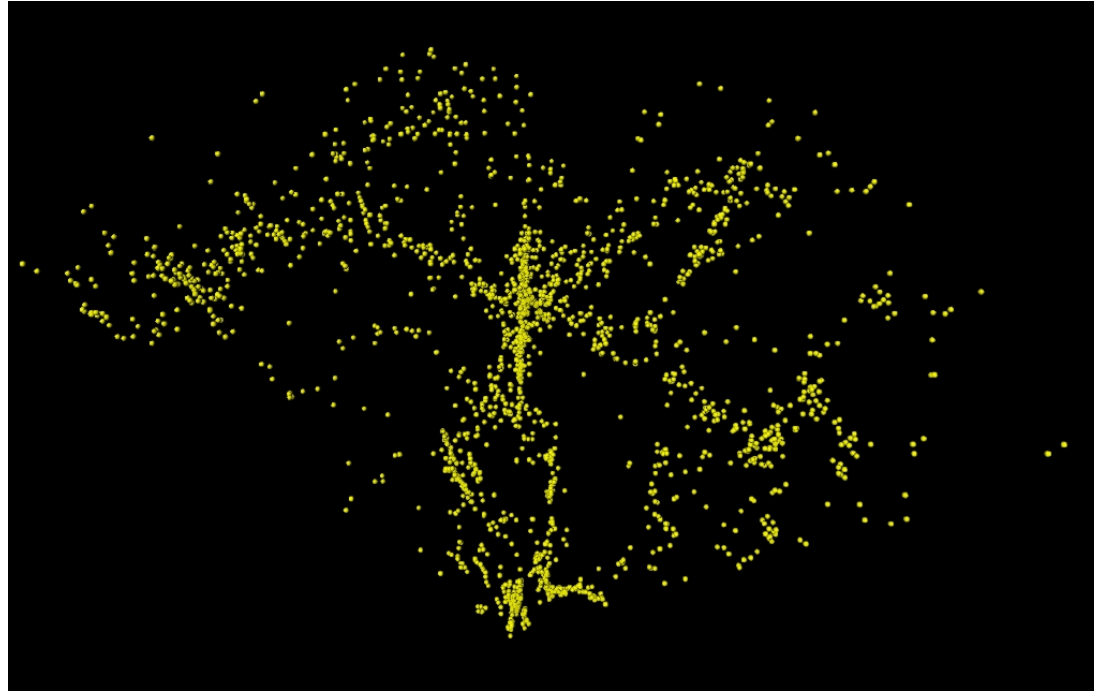
Vom CMB lernen wir, daß die ursprünglichen Fluktuationen $\mathcal{O}(10^{-4})$ sind. Spekulativ kann man überlegen, daß es sich um Quantenfluktuationen zur Zeit t_{GUT} handelt. Mit dem Zusammenhang (39) zwischen Energie und Zeit

$$t_{\text{GUT}} \approx \frac{W_{\text{Pl}}}{W_{\text{GUT}}^2} \quad (97)$$

und der Unschärferelation $\Delta W = 1/\Delta t$ folgern wir mit $\Delta t \approx t_{\text{GUT}}$

für die ursprüngliche Dichtefluktuation

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{W_{\text{GUT}}}{W_{\text{Pl}}} \approx 10^{-4} . \quad (98)$$



Vielleicht ist also die große Struktur **Cosmic stick man**, die man in der Verteilung der Galaxien auf der 100 Mpc Skala sieht, ein Abbild der Quantenfluktuation bei 10^{-34} s.

3 Jeans Analyse der Fluktuationen

Wir müssen jetzt die Frage untersuchen, wie sich Fluktuationen entwickeln, d.h. wie aus einer im wesentlichen kontinuierlich verteilten Materie Galaxien entstehen. Zum besseren Verständnis wird zunächst das Verfahren von Jeans in einem nicht expandierenden Newtonschen Universum behandelt.

3.1 Statisches Universum

Die Materie im Kosmos verhält sich wie eine Flüssigkeit. Ihr Zustand wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (99)$$

die Eulersche Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0 \quad (100)$$

und die Gleichung für das Gravitationspotential ϕ

$$\Delta\phi - 4\pi G\rho = 0 \quad (101)$$

beschrieben. Die Eulersche Gleichung ist die auf strömende Flüssigkeiten verallgemeinerte Newtonsche Bewegungsgleichung. Die statischen Lösungen für Dichte, Druck und Geschwindigkeit sind offenbar $\rho = \bar{\rho}$, $p = \bar{p}$, $\phi = \bar{\phi}$ und $\mathbf{v} = 0$. Die allgemeine Lösung setzen wir zu $\rho = \bar{\rho} + \rho_1(t)$ mit der kleinen Störung ρ_1 an. Entsprechendes gilt für p , \mathbf{v} und ϕ . Einsetzen und Sammeln der in den Störungen linearen Terme ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \mathbf{v}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\bar{\rho}} \nabla \rho_1 + \nabla \phi_1 &= 0 \\ \Delta \phi_1 - 4\pi G \rho_1 &= 0 . \end{aligned} \quad (102)$$

Hierin wurde noch $p_1 = v_s^2 \rho_1$ benutzt, wobei $v_s^2 = \bar{p}/\bar{\rho}$ die Schallgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit ist. Anstelle von ρ_1 benutzen wir jetzt wieder δ und gehen analog zu (73) für alle

Komponenten in den Fourier-Raum. Dies ergibt mit $\delta_k = \tilde{\delta}(k)$ die 3 Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_k - \imath \mathbf{k} \mathbf{v}_k &= 0 \\ \dot{\mathbf{v}}_k - \imath v_s^2 \delta_k \mathbf{k} - \imath \mathbf{k} \phi_k &= 0 \\ k^2 \phi_k + 4\pi G \bar{\rho} \delta_k &= 0\end{aligned}\tag{103}$$

Die dritte Gleichung eröffnet eine neue Interpretation des PHZ-Spektrums: Das Leistungsspektrum des Potentials $k^3 |\phi_k|^2$ hängt nicht von k ab, ist also skalenunabhängig.

Differenzieren der ersten Gleichung und Einsetzen der beiden anderen führt zu der Schwingungsgleichung

$$\ddot{\delta}_k + \delta_k (v_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}) = 0 \quad .\tag{104}$$

Mit dem Ansatz $\delta_k = A e^{-\omega t}$ erhalten wir die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho} \quad ,\tag{105}$$

also ebene Wellen (z.B. $A = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}')/V$) oder Überlagerungen

ebener Wellen für $v_s^2 k^2 > 4\pi G \bar{\rho}$. Der bekannte Fall von Schallwellen in Flüssigkeiten ohne Gravitation wird mit $G = 0$ erhalten. Für große Dichten wird aber nun ω^2 negativ, d.h. die Lösungen werden instabil und die Dichte steigt exponentiell mit der Zeit an. Das Gebiet der störungstheoretischen Lösungen wird rasch verlassen, die Jeans-Analyse zeigt jedoch prinzipiell, daß Dichtefluktuationen zu Gebieten hoher Dichte, also Cluster von Galaxien oder sogar Galaxien, führen können. Die Grenze wird durch die Jeans-Länge $\lambda_J = 2\pi/k_J$

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} v_s \quad (106)$$

gegeben. In der Zeit zwischen der e^+e^- -Annihilation und der Entkopplung haben wir ein Plasma aus Baryonen und Photonen. Dunkle Materie in Form von WIMPS spielt keine Rolle, da diese Teilchen nur schwach wechselwirken. Wir setzen vereinfachend $\bar{\rho} = \rho_\gamma$ und $v_s = c/\sqrt{3}$, da für Strahlung die Zustandsgleichung $p = \rho c^2/3$ gilt. Damit gilt in atomaren Einheiten mit dem Gesetz

(38) von Stefan-Boltzman

$$\lambda_J = \frac{\sqrt{5}W_{Pl}}{\sqrt{\pi}T^2} . \quad (107)$$

Die zugehörige Jeans-Masse der Baryonen wird aus $M_{B,J} = (4\pi/3)(\lambda_J/2)^3\rho_B$ berechnet. Ein Anwachsen der Fluktuationen ist nur für $\lambda > \lambda_J$ möglich, dazu muß $M_{B,J} > M_{B,H}$ gelten, wobei $M_{B,H}$ die Masse der Baryonen innerhalb des Horizonts ist. Für das Verhältnis der beiden Massen gilt

$$\frac{M_{B,J}}{M_{H,J}} = \frac{\lambda_J^3}{D_H^3} \quad (108)$$

und mit $D_H = 2ct$ ergibt die numerische Auswertung mit Hilfe von (39) eine Faktor von 26! Damit sind bis zur Entkopplung nur Wellenlösungen möglich und das Anwachsen der Fluktuationen kann erst danach beginnen.

Wir untersuchen die Abhängigkeit der Jeans-Masse von der Temperatur etwas genauer. Im RD Universum läßt sich die

Dichte der Baryonen mit Hilfe von $\rho_{M,\text{eq}} = \rho_{\gamma,\text{eq}}$ mit der Dichte der Photonen verknüpfen, solange die Baryonen nicht selbst relativistisch werden

$$\rho_B = \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \rho_{\gamma,\text{eq}} \frac{T^3}{T_{\text{eq}}^3} . \quad (109)$$

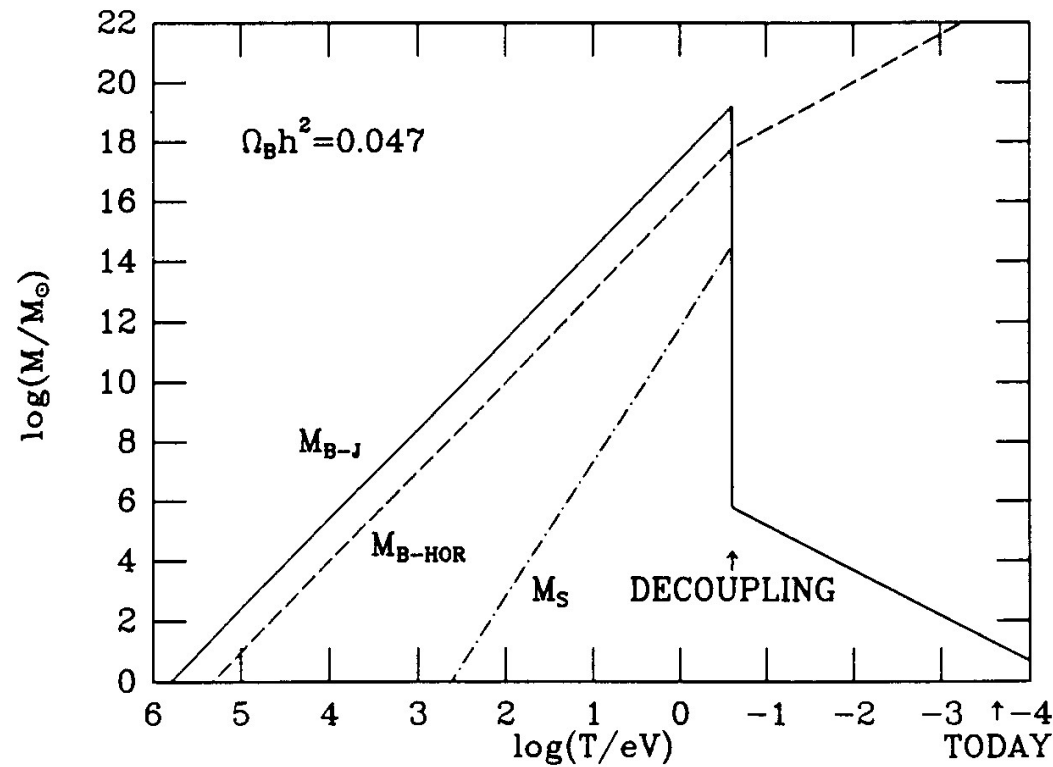
Die baryonische Jeans-Masse ist also $\sim 1/T^3$ vor der Entkopplung. Für $\rho_{\gamma,\text{eq}}$ wird wieder (38) benutzt und nach der Zusammenfassung aller Faktoren ergibt sich

$$M_{B,J} = 0.7 T_{\text{eq}} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \left(\frac{W_{\text{Pl}}}{T} \right)^3 , \quad (110)$$

oder

$$M_{B,J} = \frac{0.3 \cdot 10^{18} M_{\odot}}{T^3} , \quad (111)$$

wobei die Temperatur in eV einzusetzen ist.



Nach der Entkopplung sinkt der Druck der Baryonen stark ab, die Schallgeschwindigkeit ist nur noch $\approx \sqrt{kT/m_p}$ und da die Jeans-Masse $\sim v_s^3$ ist, wird sie um etwa 15 Größenordnungen kleiner. Dieser Verlauf ist in der Abbildung skizziert.

3.2 Expandierendes Universum

Um dieses Anwachsen quantitativ zu untersuchen, muß jetzt aber die Jeans-Analyse auf ein expandierendes Universum erweitert werden. Wichtig ist, daß wir die Grundgleichungen (99) u.f. der Newtonschen Mechanik beibehalten können und nur die Expansion berücksichtigen müssen. Die Diskussion ist relativ verwickelt und soll hier nur angedeutet werden.

Zunächst überzeugt man sich davon, daß auch $\rho = \bar{\rho}(R/R_0)^3$ und $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{x}$ Lösungen der Grundgleichungen für die Dichte und Geschwindigkeit der Baryonen darstellen. Die Fluktuationen werden wieder im Fourier-Raum behandelt, wobei (73) im expandierenden Universum durch

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \tilde{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{R}} d^3k . \quad (112)$$

ersetzt wird. \mathbf{r}/R ist jetzt die dimensionslose Koordinate der RW-Metrik und entsprechend ist \mathbf{k} eine dimensionslose Wellenzahl

(mitbewegte Wellenzahl), mit $k_{\text{phys}} = k/R$. Damit wird aus (99)-(101) das folgende Gleichungssystem abgeleitet:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_k - v \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}_k}{R} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(R \mathbf{v}_k) - v v_s^2 \delta_k \mathbf{k} - v \mathbf{k} \phi_k &= 0 \\ \frac{k^2}{R^2} \phi_k + 4\pi G \bar{\rho} \delta_k &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

Im weiteren Vorgehen wird \mathbf{v} in Komponenten v_{\parallel} und v_{\perp} parallel und senkrecht zum Wellenvektor zerlegt. Die Komponenten v_{\perp} verschwinden $\sim 1/R$ wegen $d(Rv_{\perp})/dt = 0$. Die Zusammenfassung der verbleibenden Differentialgleichungen ähnlich dem Vorgehen weiter oben, ergibt

$$\ddot{\delta}_k + 2 \frac{\dot{R}}{R} \dot{\delta}_k + \delta_k (v_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}) = 0 \quad . \quad (114)$$

Mit $\dot{R} = 0$ erhält man also wieder (104) zurück. Für $k/R > k_J$ gibt es wieder (angenähert) Schwingungslösungen. Für $k/R \ll k_J$

erhalten wir

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}_k - \delta_k 4\pi G\bar{\rho} = 0 \quad . \quad (115)$$

Im flachen MD mit

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3} \quad (116)$$

und

$$4\pi G\bar{\rho} = 4\pi G\rho_C \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{2}{3t^2} \quad (117)$$

wird daraus

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0 \quad . \quad (118)$$

Durch Einsetzen prüft man nach, daß $\delta_k \sim t^{2/3}$, also

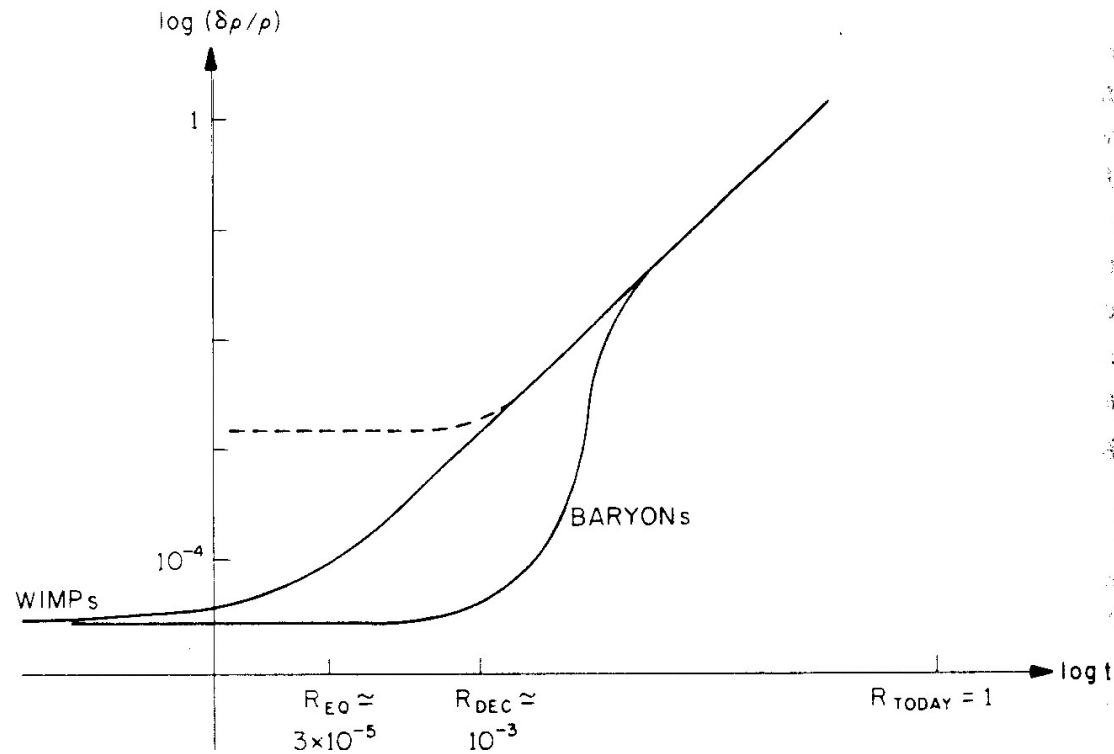
$$\delta_k \sim \frac{R}{R_0} \quad (119)$$

eine Lösung ist. Im expandierenden Universum gibt es daher auch Lösungen, in denen die Fluktuationen wachsen können. Allerdings gibt es nur noch ein **lineares** Wachstum anstelle des

exponentiellen Wachstums!

Dies hat entscheidende Konsequenzen. Nach der Entkopplung ($z = 1100$) können die Fluktuationen nur etwa um einen Faktor 1000 anwachsen, d.h. $\Delta\rho/\rho \approx 0.1$. Das ist viel zu wenig. $\Delta\rho/\rho$ muß > 1 werden, da erst dann das Gebiet der Störungsrechnung verlassen wird und die Fluktuationen nichtlinear wachsen können. Hinzu kommt, daß nur sehr große Strukturen am Wachstum teilnehmen können, da es erst nach der Entkopplung beginnt. Die bei t_{dec} eintretenden Strukturen sind auf auf der Längenskala $\lambda_{\text{dec}} = D_{\text{H,dec}} = 3ct_{\text{dec}}$. Bis heute wachsen Sie um den Faktor $(R_0/R)_{\text{eq}} = (1 + z_{\text{eq}})$ an. Wir haben in früheren Vorlesungen $t_{\text{eq}} = 400000$ a abgeschätzt, mit $z_{\text{dec}} = 1100$ ist die minimale Längenskala also ca. 450 Mpc, das übersteigt die Skala großer Supercluster.

Beide Probleme werden durch die dunkle Materie gelöst. Kalte dunkle Materie, also nichtrelativistische Teilchen, die schwach wechselwirken (**WIMPS**), werden durch eine eigene Gleichung

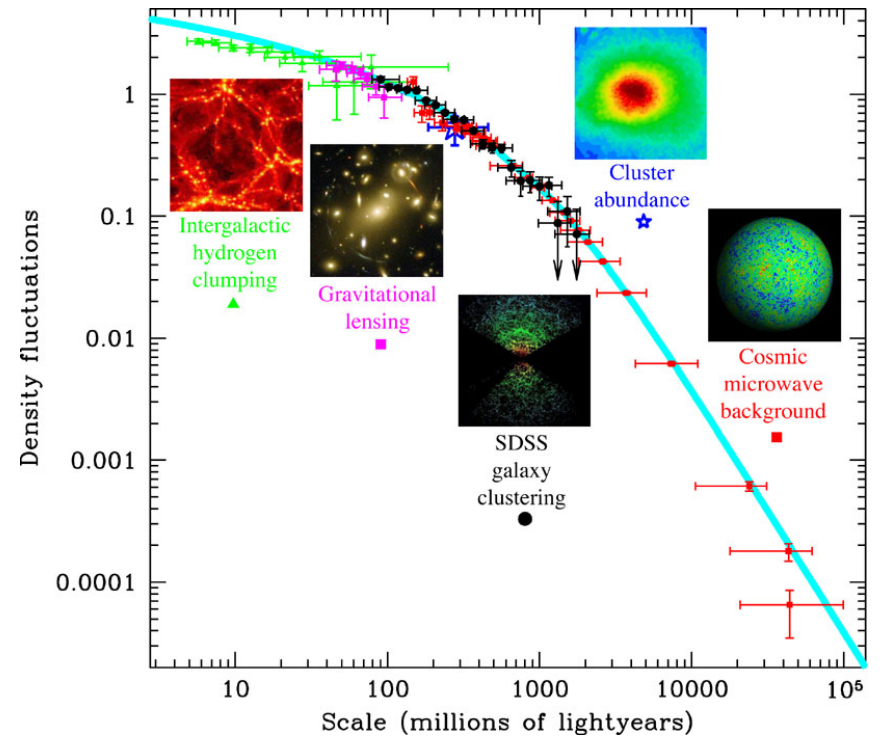
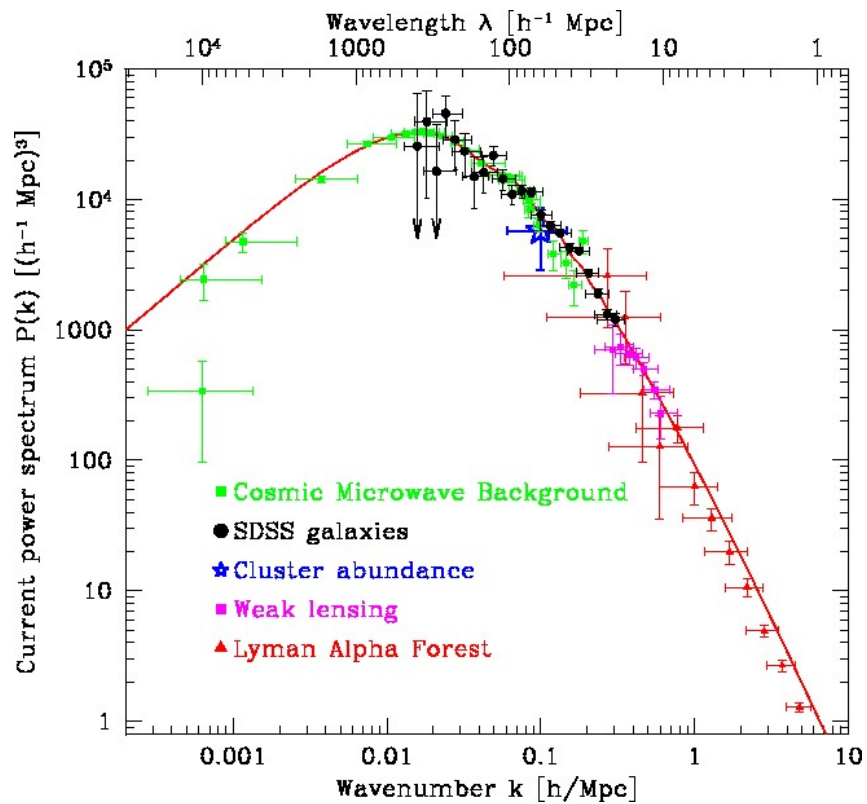


(114) beschrieben, verlassen aber das Gleichgewicht mit der Strahlung schon zu Beginn des MD. Die Fluktuationen beginnen früher zu wachsen und nach t_{dec} wechselwirken die Baryonen gravitativ mit den WIMPs und werden nachgezogen. Die am Wachstum teilnehmenden Skalen sind jetzt um den Faktor $\sqrt{5400/1100}$ kleiner, genauere Abschätzungen ergeben $\lambda = 13/\Omega_M h^2$ Mpc. Dieses Verhalten ist in der Abbildung qualitativ

gezeigt. Bei $z \approx 10$ wird dann der nicht lineare Bereich betreten.

Das nichtlineare Anwachsen der Strukturen kann nur mit numerischen Methoden behandelt werden, wobei es ausreicht, die dunkle Materie zu behandeln und die statistischen Eigenschaften der Resultate mit der Verteilung der Materie im heutigen Universum zu vergleichen. Es gibt eine Vielzahl von numerischen Rechnungen, welche die großräumigen Strukturen unseres Universums befriedigend simulieren.

Die in der nächsten Vorlesung behandelten Messungen des CMB haben eindrucksvoll bestätigt, daß die Bildung der ganz großen Strukturen im Kosmos (**walls, voids, filaments**) durch ein Leistungsspektrum $|\delta_k|^2 \sim k$ beschrieben wird. Bei kleinen Abständen (große k) gilt hingegen $|\delta_k|^2 \sim k^{-n}$ mit der groben Abschätzung $n \approx 1.5$. Dies entspricht dem früher angegebenen Verhalten der Korrelationsfunktion $\xi(r)$.



Die Figur erfaßt Strukturen bis herunter zu Clustern (Haufen).
 Die Kurve entspricht einer Rechnung mit dunkler Materie und den
 Standard-Parametern.