

Astronomie und Astrophysik II

SS 2006 ^a

Christoph Berger / Frank Raupach

RWTH-Aachen

Physikalisches Institut Ib

Email: frank.raupach@cern.ch

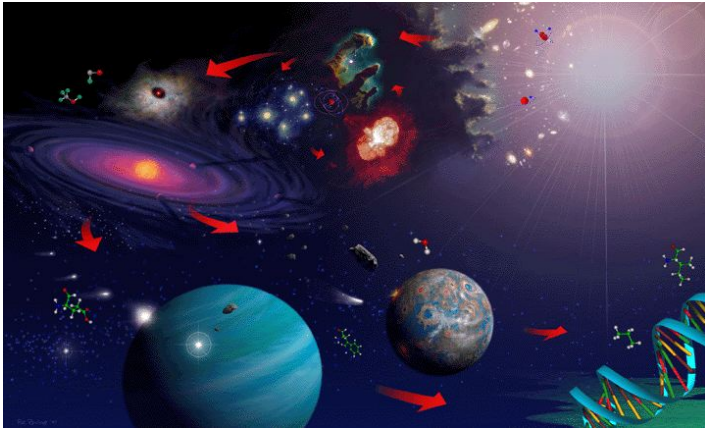
Email: berger@rwth-aachen.de

April 18, 2006

^aInstitut Ib, RWTH-Aachen

Strukturbildung im Kosmos

Inhalt der Vorlesungen über
Strukturbildung



- Das Standardmodell der Kosmologie
- Strukturmaße
- Die Entwicklung von Fluktuationen
- Bildung von Galaxien
- Fluktuationen der CMB

1 Das kosmologische Standardmodell

1.1 Das kosmologische Prinzip

Im Standardmodell ist der Kosmos aus einem Urknall **big bang** d.h. einer Singularität der Energiedichte entstanden. Die Ausdehnung wird durch das kosmologische Prinzip und die Friedmann Gleichungen der AR quantitativ beschrieben.

Das kosmologische Prinzip besagt, daß für jeden Beobachter das Universum gleich aussieht, es muß also isotrop und homogen sein. Quantitativ beschreibt ein Beobachter im Zentrum eines Polar-KS die Lage der Galaxien durch Angabe von r, Θ, ϕ zur Zeit t . Es gilt die Robertson Walker Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2 \right) \quad (1)$$

Hierin sind:

ds invariantes Linienelement der Raumzeit

Θ, ϕ Winkel eines Polarkoordinatensystems

r mitbewegte Radialkoordinate (dimensionslos)

k Parameter der Raumkrümmung, $k = 0, \pm 1$

$R(t)$ Skalenparameter ([Länge]), der von der universellen Zeit t abhängt. $R(t)$ beschreibt die Ausdehnung des Raumes.

Gravitativ oder anders gebundene System (Galaxien, Sterne, Atome) nehmen an der Ausdehnung nicht teil.

Unser Universum erfüllt $k = 0$. Damit wird die Metrik bis auf die Zeitabhängigkeit von R Minkowski-artig. Der Ausdruck für den Eigenabstand D_p einer Galaxie in r zu einem Beobachter im Zentrum des KS ($dt = 0$)

$$D_p(t) = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2)$$

wird besonders einfach

$$D_p = R(t)r \quad (3)$$

Die Eigengeschwindigkeit wird durch $\dot{D}_p(t)$ berechnet

$$v = D_p \frac{\dot{R}}{R}, \quad (4)$$

da die mitbewegte Koordinate r sich nicht ändert. Mit der Definition $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ und dem Index "0" für Zeiten heute folgt die präzise Formulierung

$$v_0 = H_0 D_{p,0} \quad (5)$$

des Hubble-Gesetzes in der AR.

H_0 ist die Hubble-Konstante mit dem Wert

$$H_0 = 71_{-3}^{+4} \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \quad (6)$$

oder $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ und $h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}$. Praktische

Merkregel: $h^2 = 0.5$. Sehr nützlich: $1/H_0 = 13.8 \cdot 10^9 \text{ y}$.

Zur Erinnerung: $1 \text{ Mpc} = 3.085 \cdot 10^{22} \text{ m} \approx 3 \text{ Mly}$ und

$1 \text{ ly} = 0.946 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

Eine Galaxie in r sende Licht der Wellenlänge λ zur Zeit t aus, das zur Zeit t_0 (heute) mit der Wellenlänge λ_0 vom Beobachter im Ursprung empfangen wird. Mit der auch in krummlinigen KS gültigen Beziehung $ds = 0$ für Lichtstrahlen und der Definition $z = (\lambda_0 - \lambda)/\lambda$ folgt mit Hilfe von (1)

$$\frac{R_0}{R(t)} = \frac{R_0}{R} = 1 + z , \quad (7)$$

wie in Kap.12 des WS hergeleitet wurde.

Wir halten fest:

Bei großen Abständen mißt die Rotverschiebung das Verhältnis der Skalenparameter zu verschiedenen Zeiten. Die Wellenlänge wird größer, weil sich das Weltall ausdehnt!

Zusätzliche Eigenbewegungen der Galaxien führen zu Rot- bzw. Blauverschiebungen über den Dopplereffekt.

1.2 Die Friedmann Gleichung

$R(t)$ kann in der AR berechnet werden. Die 10 Einsteinschen Feldgleichungen werden mit der RW Metrik auf die Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\kappa\rho_T}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \quad (8)$$

mit den Abkürzungen $\kappa = 8\pi G$ und

$$\rho_T = \rho_M + \rho_R + \rho_V \quad (9)$$

zurückgeführt. $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ist die Newtonsche Gravitationskonstante.

Für die Materiedichte ρ_M , die Energiedichte der Strahlung $\rho_R c^2$ und die Energiedichte des Vakuums $\rho_V c^2$ gelten die Skalierungsgesetze

$$\frac{\rho_{M,0}}{\rho_M} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \quad (10)$$

$$\frac{\rho_{R,0}}{\rho_R} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 \quad (11)$$

und

$$\rho_V = \rho_{V,0} = \text{const} \quad . \quad (12)$$

Anstelle der Dichten $\rho_{i,0}$ benutzen wir die skalierten Dichten $\Omega_i = \rho_{i,0}/\rho_C$ mit der kritischen Dichte

$$\rho_C = \frac{3H_0^2}{\kappa} \quad (13)$$

das sind $2.775 \cdot 10^{11} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$, also $1.878 \cdot 10^{-27} h^2 \text{kgm}^{-3}$ oder $\rho_C c^2 = 10.53 h^2 \text{GeVm}^{-3}$.

Damit wird aus (8)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_M \left(\frac{R_0}{R} \right) + \Omega_R \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \Omega_V \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + \Omega_K \right) \quad , \quad (14)$$

mit

$$\Omega_K = \frac{-kc^2}{R_0^2 H_0^2} . \quad (15)$$

Die Friedmann-Gleichung reduziert sich für $t = t_0$ (heute) auf

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_V + \Omega_K = 1 , \quad (16)$$

wobei in unserem Universum $\Omega_K = 0$, also $\Omega_0 = \rho_{T,0}/\rho_C = 1$ gilt.

Als Zahlenwerte der Dichten wurde

- $\Omega_M = (0.135 \pm 0.008)/h^2 = 0.27 \pm 0.04$
- $\Omega_\gamma = (2.741 \pm 0.004) \cdot 10^{-5}/h^2 = (4.9 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}$
- $\Omega_V = 0.73 \pm 0.04$

bestimmt. Hierbei sind nur 16% der Materie baryonisch ($\Omega_B = 0.044 \pm 0.004$), der überwiegende Anteil ist die sog. dunkle Materie, deren Natur unbekannt ist! Neutrinos sind mit $\Omega_\nu < 0.015$ ausgeschlossen. Ω_γ ist die gemessene skalierte Dichte der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB). Für die gesamte Strahlung wird $\Omega_R = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$ angesetzt.

Der Konvention folgend formulieren wir die Friedmann-Gleichung für die Rotverschiebung z . Differenzieren von (7) ergibt

$$\dot{z} = -(1+z)^2 \frac{\dot{R}}{R_0} \quad (17)$$

und daher lautet die FG nun

$$\dot{z} = -H_0(1+z)\sqrt{P(z)} \quad (18)$$

mit

$$P(z) = \left(\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_V + \Omega_K(1+z)^2 \right) . \quad (19)$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$(t_0 - t)H_0 = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1+\zeta)\sqrt{P(\zeta)}} . \quad (20)$$

Alle expliziten Lösungen erfüllen die Reihenentwicklung

$$z = (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 H_0^2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + \dots \quad (21)$$

mit dem "Bremsparameter"

$$q_0 = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)_0 \frac{1}{H_0^2} . \quad (22)$$

Für kleine z gilt also $cz = c\Delta t H_0$. Aus (1) leiten wir aber durch Integration für kleine Δt die Beziehung $c\Delta t = D_{p,0}$ ab und daher bekommen wir

$$cz = D_{p,0} H_0 , \quad (23)$$

den von Hubble gefundenen linearen Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und Abstand.

Ab $z > 0.5$ wird die lineare Beziehung ungenau und die Korrekturterme sind unterschiedlich für verschiedene Abstandsmaße. Astronomen messen die scheinbare Helligkeit l in Größenklassen m mit

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log \left(\frac{l_1}{l_2} \right) . \quad (24)$$

Über den Distanzmodulus

$$m - M = 5 \log \frac{d_L}{10} \quad (25)$$

(d_L in pc) wird der Luminositätsabstand d_L gemessen. Es gilt die Näherung

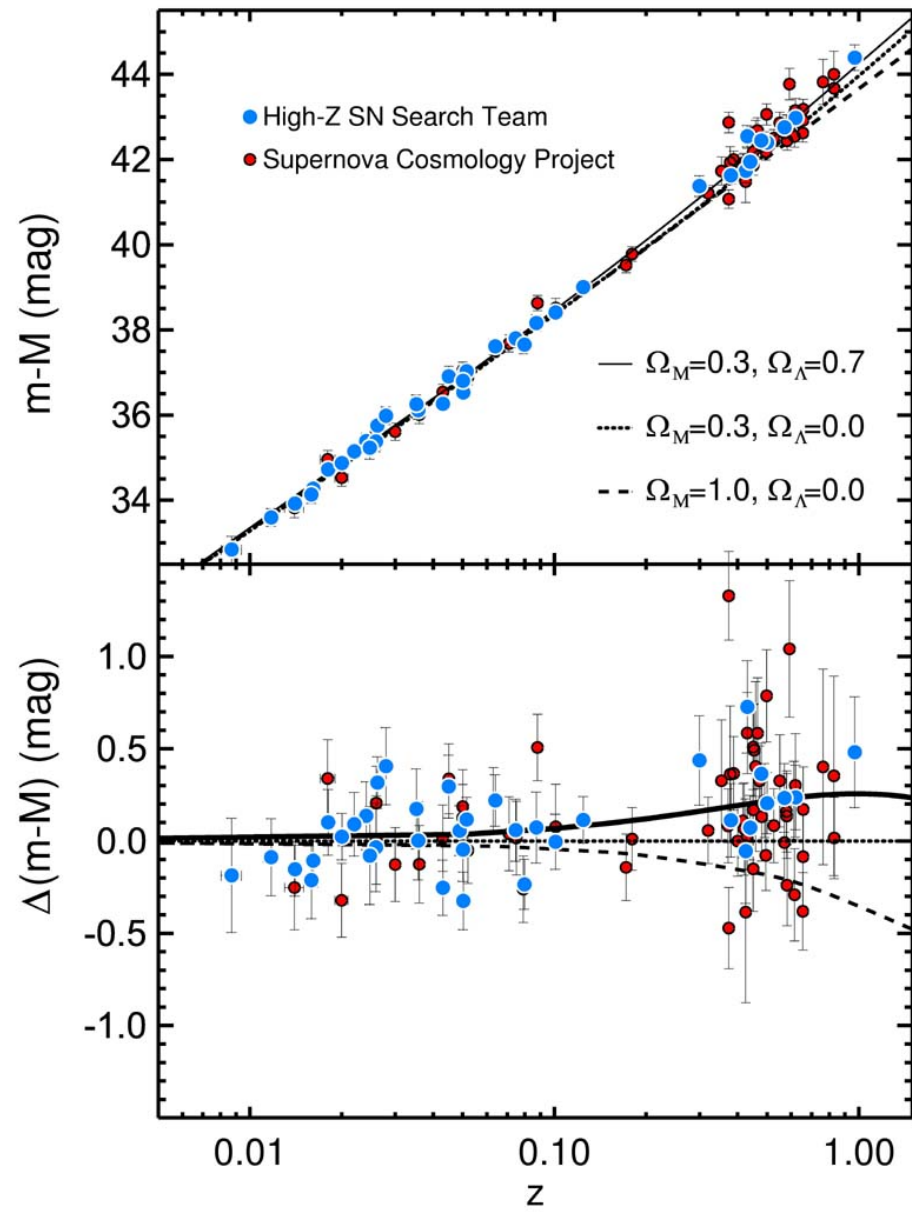
$$d_L = \frac{zc}{H_0} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z \right) . \quad (26)$$

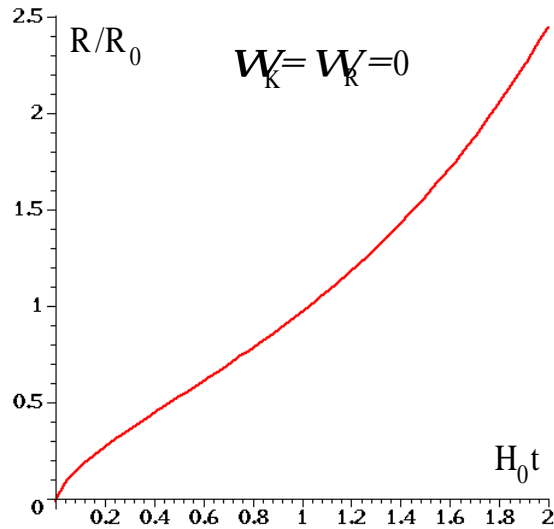
Untersuchungen der Helligkeit und Rotverschiebung von Supernovae zeigen, daß das Universum sich beschleunigt ausdehnt. Dies stimmt mit der Bestimmung von Ω_V mit anderen Methoden überein.

Aus $\Omega_V = 0.73$ folgt wegen

$$q_0 = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_V = -0.59 . \quad (27)$$

Das negative Vz. bedeutet $\ddot{R} > 0!$





Zur expliziten Berechnung von $R(t)$ setzen wir $\Omega_R = 0$

$$P(z) = \left(\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_V \right) \quad (28)$$

Aus (20) folgt unter Beachtung von $\Omega_M + \Omega_V = 1$

$$\frac{R}{R_0} = \left[\sqrt{\frac{\Omega_M}{1-\Omega_M}} \sinh \left(\frac{3H_0 t \sqrt{1-\Omega_M}}{2} \right) \right]^{2/3} . \quad (29)$$

Die wichtigste Erkenntnis: $R \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$, die Expansion des Raumes beginnt im **Urknall, Big Bang**. Dieser läßt sich qualitativ schon aus dem Hubble-Gesetz begründen.

Das Alter des Universums wird für $R = R_0$ zu

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_M}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{1-\Omega_M}{\Omega_M}} \quad (30)$$

berechnet, also $H_0 t_0 = 0.78 \cdot 1.27 = 0.99$ für $\Omega_M = 0.27$. Numerisch $t_0 = (13.66 \pm 5\%) \cdot 10^9$ y.

Schon für $H_0 t \leq 0.6$, also $z \geq 0.56$, wird (29) durch

$$\frac{R}{R_0} = (\sqrt{\Omega_M} 3H_0 t / 2)^{2/3} \quad (31)$$

mit einer Genauigkeit besser als 10% angenähert. Diese Lösung gilt für nicht zu kleine z auch für alle anderen materiedominierten Universen ($\Omega_M + \Omega_K = 1$) mit nicht zu großen Λ , d.h. sie beginnen alle mit dem Urknall. Mit $\Omega_M = 1$ ist z.B.

$$\frac{R}{R_0} = (3H_0 t / 2)^{2/3} \quad (32)$$

die exakte Lösung eines flachen ($k = 0$) materiedominierten Universums ohne kosmologische Konstante ($\Omega_V = 0$).

Für große z ist wegen (11) der Ansatz $\Omega_R = 0$ nicht mehr gerechtfertigt. Als Grenze gilt $z_{\text{eq}} = \Omega_M / \Omega_R$, also $z_{\text{eq}} = 5400$, wenn man nur die gemessene Energiedichte der Photonen

berücksichtigt. Die Energiedichte der Neutrinos kann theoretisch damit verknüpft werden (nächster Abschnitt) und es gilt

$$\rho_\nu c^2 = 0.68 \rho_\gamma c^2, \text{ also } z_{\text{eq}} = 3200.$$

Im strahlungsdominierten Universum mit $z \gg z_{\text{eq}}$ folgt aus

$$P(z) = \Omega_R (1 + z)^4$$

$$\frac{R}{R_0} = (2\sqrt{\Omega_R} H_0 t)^{1/2}, \quad (33)$$

alle strahlungsdominierten Universen haben den **BIg Bang**. Mit der vereinfachenden Annahme, daß (31) bis zu t_{eq} gültig ist, ergibt sich mit $(R/R_0)_{\text{eq}} = (t_{\text{eq}}/t_0)^{2/3}$ der Wert $t = 92000\text{a}$ für den Beginn der materiedominierten (MD) Epoche.

Zusammenfassend stellen wir fest:

Die Modelle der AR sagen den Urknall voraus und erklären das empirisch gefundene Hubble-Gesetz.

1.3 Thermische Geschichte des Universums

Zur Bestimmung des Alters des Universums ist der Übergang zur strahlungsdominierten (RD) Epoche numerisch zu vernachlässigen. Auf der anderen Seite wird hier das neue Kapitel der thermischen Geschichte des frühen Universums eröffnet. Wir formen (33) mit Hilfe von (11) zu

$$\rho_R = \frac{3}{4\kappa t^2} \quad (34)$$

oder

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_R}} \quad (35)$$

um.

Die spektrale Energiedichte $u = d\rho_R c^2 / dW$ wird durch das Plancksche Gesetz

$$u_\gamma = \frac{g_B}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{W_\gamma^3}{e^{W_\gamma/kT} - 1} \quad (36)$$

festgelegt, wobei zunächst nur Photonen als Komponenten der Strahlung auftreten. g_B bezeichnet die Anzahl der Einstellungen des Spins für Bosonen, also $g_B = 2$ für Photonen. Es ist praktisch, zum Einheitensystem der Teilchenphysik mit $\hbar = c = 1$ zu wechseln und gleichzeitig mit $k = 1$ die Temperatur in eV zu messen, $1\text{eV} = 11604\text{K}$. Jetzt ist also $u = d\rho_\gamma/dW$ und

$$\frac{d\rho_\gamma}{dW} = \frac{g_B}{\pi^2} \frac{W_\gamma^3}{e^{W_\gamma/T} - 1} . \quad (37)$$

Eine Umrechnung in das SI-System ist mit $\hbar c = 1 = 197.33 \text{ eVnm}$ leicht möglich. Das Integral von (37) ergibt das Gesetz von Stefan-Boltzmann

$$\rho_\gamma = \frac{g_B \pi^2}{30} T^4 \quad (38)$$

und daher, solange ρ_R nur durch ρ_γ bestimmt wird, mit $1/\sqrt{G} = W_{\text{Pl}}$

$$t = 0.301 \frac{W_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_B T^2}} , \quad (39)$$

also numerisch

$$t = 2.41 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{g_B} T^2} \text{ GeV}^2 s . \quad (40)$$

Die zugehörige Anzahldichte n_γ der Photonen wird durch Integration von $d\rho_\gamma/W dW$ zu

$$n_\gamma = \frac{1.2021 g_B}{\pi^2} T^3 \quad (41)$$

bestimmt.

Wir brauchen auch noch den Zusammenhang zwischen R und T . Im strahlungsdominierten Universum wird R bei bekannter Temperatur wegen (11) über

$$\frac{R}{R_1} = \frac{1 + z_1}{1 + z} = \frac{T_1}{T} \quad (42)$$

berechnet. Allgemeiner kann man auch argumentieren, daß Wellenlängen wie R skalieren, und wegen $\lambda \sim 1/T$ folgt die letzte Gleichung.

Oberhalb von $T = 1$ MeV können e^+e^- -Paare erzeugt werden, die schnell relativistisch werden und mit den Photonen im thermischen Gleichgewicht (GG) sind. Fermionen im GG gehorchen der Fermiverteilung, deren Integral für relativistische Fermionen

$$\rho_F = \frac{7}{8} \frac{g_F \pi^2}{30} T^4 \quad (43)$$

ergibt. Für Elektronen gilt $g_F = 2$, für Neutrinos $g_F = 1$ und entsprechend für die Antiteilchen. Numerisch wird (39) zu

$$t = 0.301 \frac{W_{Pl}}{\sqrt{g} T^2} \quad , \quad (44)$$

mit $g = g_B + 7/8 g_F$ abgeändert. Für die Anzahldichten gilt schließlich (Kap. 31 WS 05/06)

$$n_F = \frac{0.901 g_F}{\pi^2} T^3 \quad . \quad (45)$$

Wir verfolgen die thermische Geschichte des Universums anhand von (44) beginnend bei der Temperatur der sog. **grand unified**

Theories (GUT) von 10^{15} GeV. Hier ist z.B der volle Teilcheninhalt der Elementarteilchenphysik zu berücksichtigen, das sind die W^\pm und Z^0 -Bosonen ($g_B = 3 \times 3$), 8 Gluonen ($g_B = 8 \times 2$), das Photon ($g_B = 2$), 6 Quarks und Antiquarks ($g_F = 7/8(12 \times 2)$), 3 geladene Leptonen und Antileptonen ($g_F = 7/8(6 \times 2)$) und 3 Neutrinos und Antineutrinos, ($g_F = 7/8(3 \times 2)$), das ergibt $g = 63.75$. Viele Theoretiker vermuten, daß zu dieser Zeit das Universum **supersymmetrisch** ist, d.h. daß zu jedem Fermion ein neues Teilchen mit Spin 0 und zu jedem Boson ein neues Fermion gehört, während alle anderen Eigenschaften gleich bleiben. Damit wird g etwa doppelt so groß. Mit wachsender Zeit fällt die Temperatur ab und die Teilchen mit den höchsten Massen scheiden als erste aus dem Gleichgewicht aus, was jedesmal zu einer Änderung von g führt. Besonders interessant wird der Bereich unterhalb der Schwelle der μ -Paarerzeugung. An dieser Schwelle muß die Energie der Photonen 210 MeV erreichen und da im Planck-Spektrum

$\bar{W}_\gamma = 2.7T$ gilt, gehört hierzu eine Temperatur von ≈ 80 MeV. Die Expansion des Universums wird für $T < 80$ MeV durch Photonen, e^+e^- -Paare, aber auch durch Neutrinos bestimmt, da diese in Reaktionen wie $e^- + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ erzeugt und vernichtet werden können. Damit bekommen wir $g_F = 10$ und $g = 86/8$. Die wenigen vorhandenen Myonen und Nukleonen sind im GG mit den relativistischen Teilchen, haben aber keinen Einfluß auf die Expansion.

Bei Temperaturen von etwa 1 MeV entkoppeln sich die Neutrinos, diesmal nicht wegen Unterschreitung einer Schwelle, sondern weil die Wirkungsquerschnitte der o.a. Reaktionen zu klein werden, um das GG aufrecht zu erhalten (Kap. 34, WS 05/06). Die Energie der Neutrinos gehorcht jedoch weiter einer Fermiverteilung, deren Temperatur durch (42) bestimmt wird (freie Expansion)!

Unterhalb von $T = 0.4$ MeV kann die Erzeugung von e^+e^- -Paaren nicht mehr aufrecht erhalten werden. Sie zerstrahlen bis auf einen

kleinen Rest, welcher der Anzahldichte von Protonen entspricht, das Universum ist elektrisch neutral. Das Elektronengas ist im thermischen Gleichgewicht mit den Photonen bis bei $T \approx 3000$ K Wasserstoff durch Elektroneneinfang gebildet wird.

1.4 Relikte des Urknalls

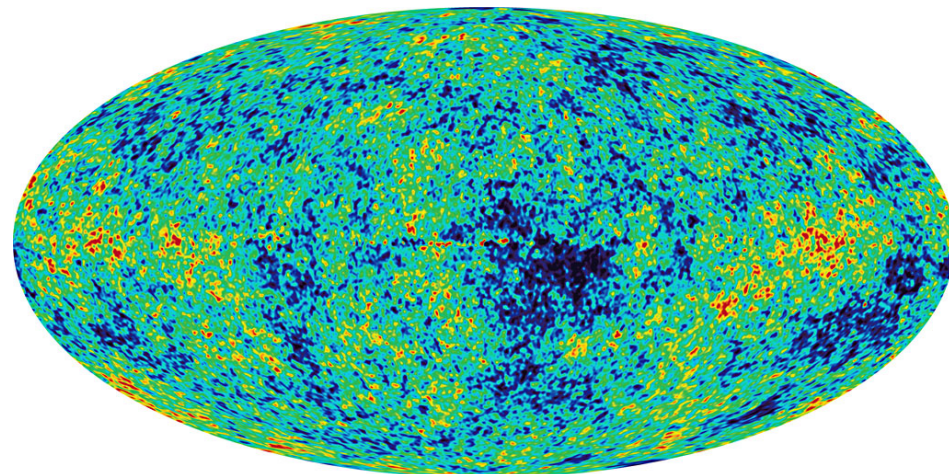
Das wichtigste Relikt ist die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB). Mit dem gemessenen Wert von $T_0 = 2.725$ K folgt aus (41) $n_{\gamma,0} = 3.1546 \cdot 10^{-12}$ eV³ oder $n_{\gamma,0} = 410.5$ cm⁻³. Aus Ω_B kann man nun $n_{B,0}$ und $n_{B,0}/n_{\gamma,0} = n_B/n_\gamma$ berechnen. Diese Zahl

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-10} \quad (46)$$

ist ein weiterer wichtiger Parameter des Universums. Da $n_{\gamma,B} \sim 1/R^3$, bleibt das Verhältnis zeitlich konstant, bis zu Temperaturen, wo Baryonen und Antibaryonen erzeugt werden können. Auf den ersten Blick erscheint η sehr klein, theoretisch erwartet man aber $\eta \approx 10^{-16}$ in Universen mit gleicher Anzahl von

Baryonen und Antibaryonen bei hohen Temperaturen. Die Symmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen kann also nicht exakt gelten.

Der hohe Überschuß an Photonen ($1/\eta \approx 10^9$) bedingt, daß schon bei $z_{\text{dec}} = 1100$, also einer Temperatur von nur 0.258 eV (entsprechend 3000 K) das Wasserstoffgas des Universums vollständig ionisiert ist (Kap. 35, WS 05/06). Oberhalb dieser Temperatur sind Materie und Photonen thermisch im Gleichgewicht. Es finden gleichviele Ionisations- und Rekombinationsprozesse statt. Das Universum ist für Strahlung undurchsichtig.



Unterhalb wird das Universum durchsichtig, die Photonen breiten sich frei aus. Die CMB im heutigen Universum gibt ein Bild vom Universum bei $z = 1100$, dem Zeitpunkt der letzten Streuung.

Die Temperatur der Entkopplung hängt von η ab. Aber auch ohne genaue Kenntnis dieses Parameters kann man eine Temperatur der CMB im Bereich von einigen Kelvin vorhersagen. Die Existenz dieser Strahlung ist daher eine von speziellen Parametern unabhängige Vorhersage der Urknall Modelle!

Es läßt sich auch zeigen (Kap. 31 WS 05/06), daß die Temperatur der Photonen nach der e^+e^- -Vernichtung (also $T < 0.4\text{MeV}$) um den Faktor $(11/4)^{1/3}$ ansteigt, während die Temperatur der (masselosen) Neutrinos keinen Sprung macht. Die Temperatur der Neutrinostrahlung sollte heute also 1.95 K betragen mit einer Energiedichte und Anzahldichte, die unabhängig von einer eventuellen Neutrinomasse aus den relativistischen Formeln (43) und (45) bestimmt wird, da sie aus der freien Expansion nach der Entkopplung hervorgehen. Mit

$g_F = 6$ für 3 Sorten Neutrinos (und Antineutrinos) erhalten wir $\rho_\nu = 0.68\rho_\gamma$ und $n_\nu = 3 \cdot 113 \text{ cm}^{-3}$. Dieses typische Relikt des Urknalls konnte aber bis heute nicht nachgewiesen werden.

Auch die Häufigkeitsverteilung der leichten Elemente im Universum wird im **Big Bang Modell** vorhergesagt (Kap. 33 WS 05/06). Die Bindungsenergie Q des Deuteriums ist 2.25 MeV. Wegen des hohen Wertes von η wird erst unterhalb einer Temperatur von 92 keV die Bildung von Deuterium möglich. Mit $g = 2$ ist das zugehörige Alter des Universums nach (44) $t = 200\text{s}$. Bei Temperaturen im MeV-Bereich befinden sich die Nukleonen über die Reaktionen



und



mit der Strahlung im GG. Die Anzahldichten der (nichtrelativistischen) Neutronen und Protonen werden daher

durch die Boltzmann-Verteilung

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(\frac{-Q}{T}\right) \quad (49)$$

festgelegt. Nach der Entkopplung der Neutrinos zur Zeit t_d bei der Temperatur T_d bleibt nur noch der Zerfall der Neutronen gemäß

$$X_n(t) = X_n(t_d) \exp\left(\frac{-t}{\tau_n}\right), \quad (50)$$

worin die Definition

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p} \quad (51)$$

benutzt wurde. Für t kann das Alter des Universums (hier also 200 s) genommen werden, da $t_d \ll t$. T_d hängt von g ab. Mit $T_d = 0.77 \text{ MeV}$ für 3 Sorten Neutrinos und $\tau_n = 886\text{s}$ erhalten wir $n_n/n_p = 1/7$ zur Zeit der Fusion des Deuteriums. Unmittelbar danach bildet sich ${}^4\text{He}$ mit seiner hohen Bindungsenergie von 28 MeV. Da in unserem Zahlenbeispiel auf 2 Neutronen 14 Protonen kommen, gehören zu jedem Heliumkern 12 Protonen und das

Massenverhältnis Y von Helium zu Protonen beträgt 0.25. Diese Zahl liegt sehr nahe bei den Messungen und der genauen Vorhersage von $Y = 0.248$, die aus umfangreichen numerischen Berechnungen der Reaktionen im expandierenden frühen Universum gewonnen wurde.

1.5 Das inflationäre Universum

Die hier geführte Diskussion von Friedmann-Modellen bis zu $t_{\text{GUT}} \approx 10^{-34}\text{s}$ führt zu fundamentalen Widersprüchen. Wir haben 2 Probleme behandelt (Kap. 33 WS 05/06):

- Das Horizontproblem
- Das Flachheitsproblem

Das Horizontproblem Die durch die Lichtlaufzeit verknüpfte Entfernung ist der Horizont D_H . In der RW-Metrik (1) gilt

$$D_H(t) = R(t) \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) \int_0^t \frac{cdt}{R(t)} , \quad (52)$$

also $D_H(t) = 3ct$ für MD und $2ct$ für RD, oder

$$\frac{D_H(t)}{D_H(t_0)} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} , \text{MD} \quad (53)$$

und

$$\frac{D_H(t)}{D_H(t_{\text{eq}})} = \left(\frac{R}{R_{\text{eq}}} \right)^2 , \text{RD} . \quad (54)$$

Jede Längenskala λ skaliert wie R :

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda_0} = \frac{R}{R_0} . \quad (55)$$

Nun setzen wir $\lambda(t_0) = D_H(t_0)$, untersuchen also

die Skala, die von t bis t_0 auf den Radius des heutigen Universums

angewachsen ist. Offenbar gilt

$$\frac{D_H(t)}{\lambda(t)} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{1/2}, \text{MD} \quad (56)$$

und

$$\frac{D_H(t)}{\lambda(t)} = \frac{R}{R_{\text{eq}}}, \text{RD} . \quad (57)$$

Dies führt schon zur Zeit t_{dec} zu einem Problem. Mit $z_{\text{dec}} = 1100$ folgt aus (56) $(D_H/\lambda)(t_{\text{dec}}) = 1/35$, d.h. das kausal verknüpfte Volumen ist 35^3 mal kleiner als die Region, die auf den heutigen Durchmesser des Universums angewachsen ist. Dies widerspricht eklatant der beobachteten Homogenität der CMB.

Noch absurder werden die Zahlen im sehr frühen Universum. Nehmen wir als Beispiel die Epoche t_{GUT} mit $T = 10^{15}$ GeV. Aus (57) folgt dann

$$\left(\frac{D_H}{\lambda} \right)_{\text{GUT}} = \frac{R_{\text{GUT}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{GUT}}} \quad (58)$$

also etwa 10^{-24} auf der rechten Seite.

Das Flachheitsproblem Um das Problem zu formulieren, benutzen wir den Hubble Parameter

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad (59)$$

und dividieren (8) durch H^2 , also

$$1 + \frac{kc^2}{\dot{R}^2} = \Omega(t) \quad (60)$$

mit dem Spezialfall

$$1 + \frac{kc^2}{\dot{R}_0^2} = \Omega_0 \quad (61)$$

Hier wurde mit $\Omega(t) = \kappa\rho/(3H^2)$ eine zeitabhängige skalierte Dichte eingeführt. Aus der letzten Gleichung gewinnen wir sofort die Beziehung

$$\Omega(t) - 1 = \left(\frac{\dot{R}_0}{\dot{R}} \right)^2 (\Omega_0 - 1) \quad (62)$$

worin Ω_0 die Summe der skalierten Dichten zur Zeit t_0 ist, $\Omega_0 = \rho_{T,0}/\rho_C$. Jetzt nehmen wir stark vereinfachend an, daß die Entwicklung des Universums für alle Zeiten durch (33) beschrieben wird, woraus dann

$$\frac{\dot{R}_0}{\dot{R}} = \frac{R}{R_0} \quad (63)$$

folgt. Dies ergibt zusammen mit (42)

$$\Omega(t) - 1 = \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 (\Omega_0 - 1) . \quad (64)$$

Wir wollen die Geschichte des Universums bis zur Planck-Zeit zurückverfolgen. Mit $T_{\text{Pl}} \approx 10^{19}$ GeV ergibt sich daher $\Omega(t_{\text{Pl}}) - 1 \approx 10^{-64}$, wenn wir $\Omega_0 - 1$ großzügig als $\mathcal{O}(1)$ ansetzen. Dieser fantastische Faktor wird auch durch eine genauere Behandlung der zeitlichen Entwicklung

$$\Omega(t) - 1 = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T}\right)^2 10^{-4} (\Omega_0 - 1) . \quad (65)$$

kaum geändert. Er beträgt dann 10^{-60} . Damit unser Universum so wird, wie es ist, müssen also die anfängliche Dichte und Ausdehnungsgeschwindigkeit mit einer Genauigkeit von 60 Dezimalen festgelegt werden. Ein solches **fine tuning** wird in der modernen Physik als äußerst unwahrscheinlich angesehen und man muß nach einer dynamischen Begründung suchen.

Eine solche wurde durch die Inflationstheorie von A. Guth geliefert.



Nach dieser durchläuft das Universum kurz nach t_{GUT} , d.h.

$T \approx 10^{14}$ GeV eine de Sitter Phase. Mit $P(z) = \sqrt{\Omega_G}$ folgt

$$\frac{R}{R_1} = e^{\sqrt{(\Lambda_G/3)}(t-t_1)}, \quad (66)$$

worin t_1 den Beginn der inflationären Phase bezeichnet. Λ_G ist eine große Zahl nach Art der kosmologischen Konstanten Λ . Während der Inflation gilt $H_{\text{infl}} = \sqrt{\Lambda_G/3}$. Um ein spezifisches Beispiel zu untersuchen, nehmen wir an, daß H_{infl} dem Wert von H im strahlungsdominierten Modell zur Zeit $t_1 \approx t_{\text{GUT}}$ entspricht, das bedeutet $H_{\text{infl}} \approx 10^{34} \text{s}^{-1}$. Damit wird unmittelbar klar, daß $\Lambda_G \gg \Lambda$, während der Inflation befindet sich das Universum in einem anderen Vakuumzustand als heute! Wenn die Zeitspanne der inflationären Phase 10^{-32} s ist, wird R um einen Faktor $e^{100} = 10^{43}$ aufgebläht. Das Gebiet, aus dem unser heutiges Universum entstanden ist, hatte zur Zeit t_{GUT} gemäß (55) etwa einen Durchmesser von 0.1 m. (Es kommt hier nur auf Größenordnungen an!) Das kausal verknüpfte Gebiet mit einem Durchmesser von 10^{-26} m bläht sich in der Inflationsepoche um

einen Faktor 10^{43} auf und ist daher am Ende etwa 10^{18} mal größer als die Skala, aus der unser heutiges Universum gewachsen ist. Die (beunruhigende?) Erkenntnis ist, daß wir heute nur einen winzigen Bruchteil des Universums erkennen. Das Verhalten von Skalen und Horizonten ist entscheidend für die Strukturbildung und wird daher im nächsten Kapitel weiter behandelt.

Auch das Flachheitsproblem wird gelöst. Am Ende der inflationären Phase gilt

$$(\Omega_2 - 1) = (\Omega_1 - 1) \left(\frac{\dot{R}_1}{\dot{R}_2} \right)^2 . \quad (67)$$

Wenn also $\Omega(t) - 1$ vor der Inflation irgendeinen vernünftigen Wert hat, ist er nach der Inflation um einen Faktor e^{200} reduziert.

kc^2/\dot{R}_2^2 ist demnach unendlich klein, und man kann berechnen, daß dies auch in der anschließenden strahlungs- bzw. materiedominierten Phase nicht mehr wesentlich geändert wird. Die Vorhersage der Theorie ist also, daß das Universum mit

beliebig guter Präzision flach ist, im Sinne von $kc^2/\dot{R}^2 \rightarrow 0$. Der gemessene Wert von $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$ ist in Übereinstimmung mit der Vorhersage und die weitere Verbesserung der Genauigkeit wird diesen wichtigen Aspekt der Theorie auf den Prüfstand stellen.

Es wurden nur die kinematischen Aspekte der Theorie behandelt. Es gibt eine Vielzahl von dynamischen Modellen. Es muß ja ein Mechanismus gefunden werden, der die exponentielle Expansion und ihr Ende ermöglicht. Dies ist aber nicht mehr Gegenstand der Vorlesung.