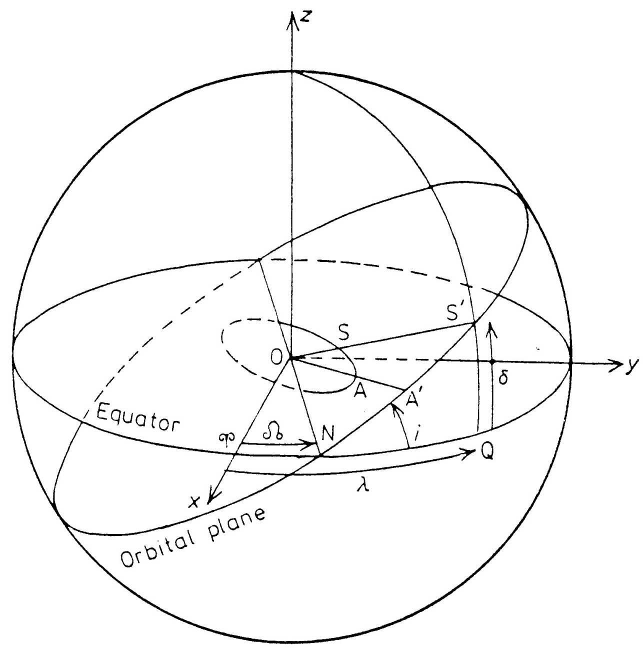
3 Künstliche Satelliten

3.1 Bahnparameter



Als geeignetes Koordinatensystem zur Beschreibung der Bahnen künstlicher Satelliten bietet sich das geozentrische Äquatorialsystem an. Die Konstante A des Abschn. 2 ist jetzt $A = GM_{\oplus}$.

Sie wird dimensionslos, wenn wir alle Längen in Einheiten des Erdradius am Äquator ($r_0 = 6378.27$ km) und alle Zeiten in Minuten messen. In diesem Kapitel hat also die Gaußsche Konstante k mit $k^2 = A$ den Zahlenwert $k = 0.07436574$.

Aus (42) berechnen wir mit (44) die Energie der Ellipsenbahn zu

$$W = \frac{-A}{2a} \quad , \tag{76}$$

sie hängt also nicht von der Exzentrizität e ab. Aus dem Energiesatz (32) wird die Geschwindigkeit der Ellipsenbahn zu

$$v^2 = A\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{77}$$

berechnet. Zum Beispiel gilt für $a = 2r_0$, (also etwa 12800 km), in einer Kreisbahn $v = k/\sqrt{2}$, das entspricht $v = 5.58$ km/s. Eine Bahn mit der Halbachse a kann erreicht werden, wenn der Satellit auf oder nahe der Erdoberfläche auf eine Geschwindigkeit v_0 gebracht wird, die aus

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{A}{r_0} = \frac{-A}{2a} \tag{78}$$

zu

$$v_0 = \sqrt{\frac{2A}{r_0} - \frac{A}{a}} \tag{79}$$

berechnet wird. Im Beispiel ist demnach $v_0 = \sqrt{3/2}v$, d.h. 9.68 km/s.

Der Grenzfall der Parabelbahn wird mit $e = 1$ d.h. $W = 0$ erreicht. Auf dieser Bahn gilt

$$v^2 = \frac{2A}{r} \tag{80}$$

mit $v \to 0$ für $r \to \infty$. Mit $W_0 = 0$ folgt in Übereinstimmung mit (79) $v_0 = 2A/r_0$ als parabolische oder Fluchtgeschwindigkeit. Der numerische Wert ist 11.17 km/s.

Satelliten werden heute ausschließlich durch einen Raketenschuß in die gewünschte Bahn gebracht. Für eine Rakete (Masse m) ohne Einfluß äußerer Kräfte, die durch Ausstoß von Treibgas der Masse dm ihre Geschwindigkeit um dv ändert, gilt der Impulssatz

$$(m + dm)(v + dv) + (v_G - v)dm = mv \quad . \tag{81}$$

Hierin ist v_G der Betrag der Geschwindigkeit des aus dem Triebwerk ausströmenden Gases. Bei Vernachlässigung quadratisch kleiner Beiträge reduziert sich diese Gleichung auf

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -v_G\frac{dm}{dt} \quad . \tag{82}$$

Den Einfluß der Schwerkraft berücksichtigen wir vereinfachend nur für einen Flug senkrecht zur Erdoberfläche. Hierzu muß auf der rechten Seite von (82) nur der Term $-mg$ hinzugefügt werden, so daß zusammengefaßt

$$dv = -v_G\frac{dm}{m} - gdt \tag{83}$$

gilt. Mit der Annahme $g = \mathrm{const}$ wird die Lösung sehr einfach,

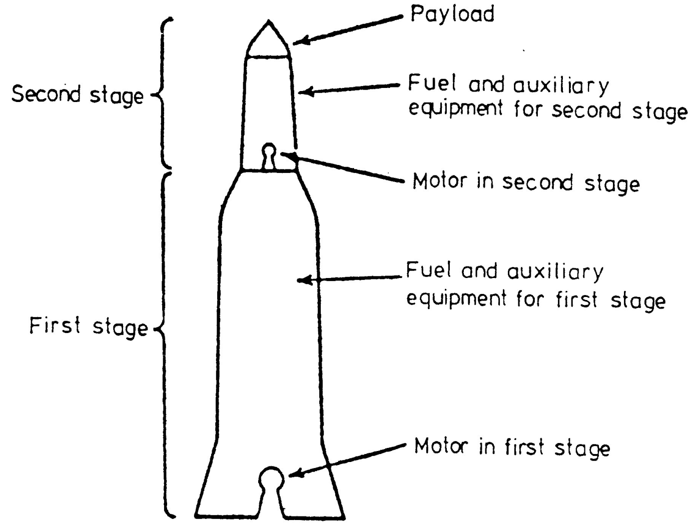
$$\Delta v = v_G \ln\left(\frac{m_0}{m_B}\right) - gt_B \quad . \tag{84}$$

Hierin ist m_0/m_B das Verhältnis der Massen beim Start und beim Brennschluß $t = t_B$, womit also m_B eine Funktion der oberen Grenze des Integrals ist. Um den zurückgelegten Weg zu berechnen, setzen wir eine konstante Massenabnahme $f = |\frac{dm}{dt}|$ mit $m_B = m_0 - ft$ an. Die Integration von (84) ergibt dann

$$s = v_G \left[\left(\frac{m_0}{f} - t_B \right) \ln \left(1 - \frac{f t_B}{m_0} \right) + t_B \right] - \frac{1}{2} g t_B^2 \quad . \qquad (85)$$

Einen hohen Geschwindigkeitszuwachs bekommt man also bei großen v_G, einem großen Verhältnis $R = m_0/m_B$ der Massen beim Start und beim Brennschluß und einer kurzen Brenndauer t_B! Mit typischen Werten $R = 5$ und $v_G = 2.5$ km/s gibt das erste Glied in (84) $\Delta v = 4.02$ km/s. Das ist weit unterhalb der in den Beispielen diskutierten Geschwindigkeiten.

Eine Abhilfe verschafft die Mehrstufenrakete. Numerisch läßt sich leicht nachprüfen, daß mit den angenommenen Werten von R und v_G und einem Verhältnis der Massen der einzelnen Stufen von $1:10$ erst mit drei Stufen die Fluchtgeschwindigkeit erreicht wird.



Ort $\boldsymbol{r}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Rakete beim Brennschluss lassen sich gemäß (84) und (85) berechnen aber auch sehr genau messen. Aus diesen Anfangswerten können die Bahnelemente ermittelt werden.

Die Halbachse a wird aus (77) bestimmt. Die erste Gleichung (42) gibt p und damit e, wobei $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0$ benutzt wird. Einsetzen von r_0 in die Bahngleichung (38) liefert $\cos(\varphi_0 - \varphi_P)$, woraus mit Hilfe der Keplergleichung (52) τ bestimmt wird. Der Vektor $\boldsymbol{C}$ steht senkrecht auf der Bahnebene. Daher gelten für die Winkel i und Ω die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\frac{C_x}{C} &= \sin i \sin \Omega \\
\frac{C_y}{C} &= \sin i \cos \Omega \\
\frac{C_z}{C} &= \cos i
\end{aligned} \tag{86}
$$

Schließlich wird ω aus (64) berechnet.

Für viele Zwecke reicht die Behandlung der Erde als kugelförmige Masse nicht aus. Abweichungen von der Kugelgestalt geben Zusatzterme im Potential, das in erster Näherung in Abhängigkeit von der geographischen Breite ϕ zu

$$
U = -\frac{A}{r}\left(1 + \frac{1}{5}\alpha\left(\frac{a_E}{r}\right)^2 (1 - 3\sin^2\phi)\right) \tag{87}
$$

modifiziert wird. Hierin ist $\alpha = (a_E - b_E)/a_E$, worin a_E und b_E, die große bzw. kleine Halbachse des Erdellipsoids bezeichnen

($\alpha = 0.0033$). Dadurch wird die Kreisfrequenz $n_0 = k/a^{3/2}$ in

$$n = n_0 \left[1 + \frac{3}{5} \frac{\alpha a_E^2}{p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right] \tag{88}$$

abgeändert mit einer entsprechenden Modifikation der Keplergleichung. Für eine Bahn in der Ebene des Himmelsäquators ($i = 0$) ist dies eine Korrektur von 0.2%! Auch die Bahnelemente ω und Ω werden in

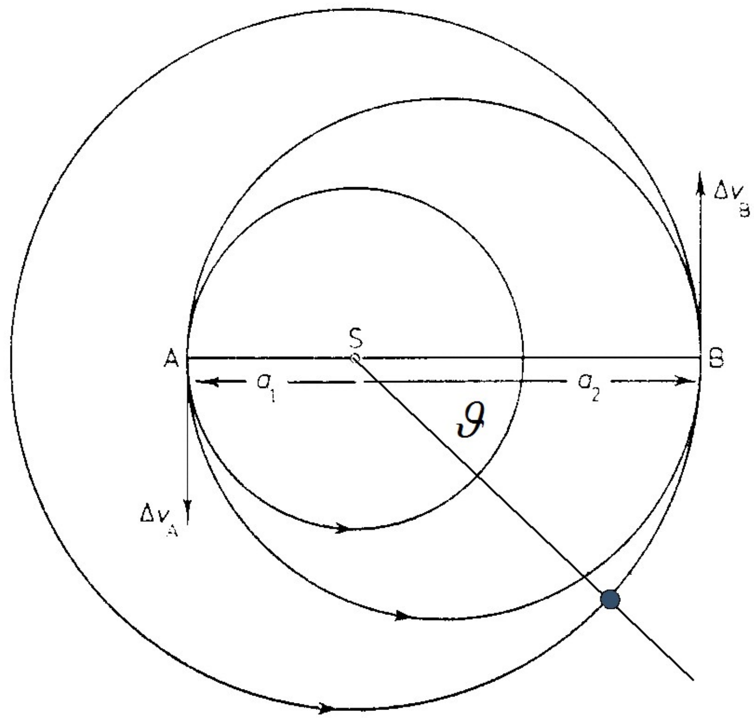
$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{5} \frac{\alpha a_E^2}{p^2} n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) t \tag{89}$$

und

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{5} \frac{\alpha a_E^2}{p^2} n t \cos i \tag{90}$$

abgeändert.

3.2 Transferbahnen



Ein besonders wichtiges Problem der Satellitentechnik ist die Überführung von einer Bahn zu einer anderen. Wir behandeln das einfachste Problem, den Transfer zwischen zwei koplanaren konzentrischen Kreisbahnen.

Die Transferbahn ist eine Ellipse, die durch eine kurze tangentiale Beschleunigung Δv_A in A erreicht wird. Durch eine zweite Beschleunigung Δv_B in B wird die Ellipse in die größere Kreisbahn überführt. Die Änderung der Energie in A ist

$$\Delta W_A = W_T - W_1 \tag{91}$$

und in B

$$\Delta W_B = W_2 - W_T \tag{92}$$

mit ($a_T = (a_1 + a_1)/2$)

$$W_T = -\frac{A}{a_1 + a_2} \quad . \tag{93}$$

Außerdem gilt natürlich $W_1 = -A/2a_1$ und $W_2 = -A/2a_2$. ΔW_A ist gleich der Änderung der kinetischen Energie in A, also

$$\Delta W_A = \frac{1}{2}(v_A + \Delta v_A)^2 - \frac{1}{2}v_A^2 \tag{94}$$

Damit ergibt sich

$$\Delta v_A = \left(\frac{A}{a_1}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right)^{1/2} - 1\right] \tag{95}$$

und entsprechend für Δv_B

$$\Delta v_B = \left(\frac{A}{a_2}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{2a_1}{a_1 + a_2}\right)^{1/2}\right] \quad . \tag{96}$$

Die für jede Korrektur erforderliche Treibstoffmenge Δm wird aus

$$\Delta v = -v_G \ln\left(1 - \frac{\Delta m}{m}\right) \tag{97}$$

berechnet. Die für den Transfer benötigte Zeit ist gleich der halben Umlaufzeit in der Transferellipse, also

$$t_T = \pi \left(\frac{8A}{a_1 + a_2}\right)^{3/2} \quad . \tag{98}$$

Die hier entwickelten Beziehungen gelten natürlich auch für die Planung eines Rendevous zwischen zwei Raumschiffen. Sie reichen aber noch nicht aus. Wenn z.B. das Raumschiff 1 aus der inneren Bahn 2 in B treffen soll muß die Transferzeit offenbar der Zeit entsprechen, die 2 noch braucht um bis B zu gelangen,

$$t_T = \frac{\vartheta}{n_2} \tag{99}$$

und daher

$$\vartheta = \pi n_2 \left(\frac{8A}{a_1 + a_2}\right)^{3/2} \quad . \tag{100}$$

Die Längenkoordinaten

$$L_i = L_{i,0} + n_i(t - t_0) \tag{101}$$

der beiden Raumfahrzeuge unterscheiden sich zu Beginn des Manövers um $\pi - \vartheta$ und daher legt

$$(n_2 - n_1)(t_S - t_0) = L_{1,0} - L_{2,0} + \pi - \vartheta \tag{102}$$

mit ϑ aus (100) die Bedingung für die möglichen Startzeiten t_S fest. Diese Zeiten sind durch ein Intervall T_S getrennt, das (ähnlich wie bei der Behandlung der synodischen und siderischen Umlaufzeit der Planeten) durch die Bedingung

$$T_S(n_1 - n_2) = 2\pi \tag{103}$$

definiert ist.

Ein Rendezvous von der äußeren zur inneren Bahn wird entsprechend behandelt. Die Bedingung (99) lautet nun $t_T = \vartheta / n_1$ und natürlich müssen in A und B Bremsmanöver gemacht werden.