2.7.2 Wellengruppen

Als einfachstes Beispiel der Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz und Wellenzahl betrachten wir 2 Sinuswellen mit ω_1, k_1 bzw. ω_2, k_2. Mit (67,68) oder direkt aus (24) folgt

$$A_{\text{res}} = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}s\right) \sin\left(\bar{\omega}t - \bar{k}s\right) \tag{70}$$

mit

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \qquad \Delta k = k_1 - k_2 \tag{71}$$

und

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad . \tag{72}$$

Daraus liest man die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Orte mit konstanter Amplitude (Gruppengeschwindigkeit) ab:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad . \tag{73}$$

2.7.3 Stehende Wellen

Eine nach rechts laufende Welle $A_1 = A_0 \sin(\omega t - ks)$ wird einer nach links laufenden Welle $A_1 = A_0 \sin(\omega t + ks)$ überlagert. Mit (67,68) ergibt sich

$$A_{\text{res}} = 2A_0 \cos(ks) \sin(\omega t) \quad . \tag{74}$$

Das ist das Bild einer Schwingung mit ortsabhängiger Amplitude. Realisiert wird diese Überlagerung durch Reflexion einer nach links laufenden Welle am offenen Ende bei $s = 0$. Falls das Ende fest ist, findet ein zusätzlicher Phasensprung $\Delta\Phi = \pi$ statt und daher

$$A_{\text{res}} = -2A_0 \sin(ks) \cos(\omega t) \quad . \tag{75}$$

(Das neg. Vz. kann in einem Zeitanteil $\cos(\omega t + \pi)$ absorbiert werden.) Eine schwingende Saite der Länge l ist an beiden Enden eingespannt. Dann passen nur Wellen, deren Wellenlänge

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \tag{76}$$

mit $n = 1, 2, 3...$ erfüllen, auf die Saite. Die Grundschwingung hat $n = 1$, die erste Oberschwingung $n = 2$ etc. Die Phasengeschwindigkeit einer transversalen

Welle auf einer mit der Kraft F gespannten Saite des Querschnitts A ist durch (55) gegeben. Damit ergibt sich

$$f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}} \tag{77}$$

für die Resonanzfrequenzen einer schwingenden Saite.

Bei der Reflexion am offenen Ende befindet sich dort ein Schwingungsbauch. Bei zwei offenen Enden gilt also Formel (76). Akustische Schallgeber sind sehr häufig Pfeifen mit einem offenen und einem geschlossenenen Ende, demnach

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n+1} \tag{78}$$

mit $n = 0, 1, 2, ...$ für die Grundschwingung, erste Oberschwingung etc.

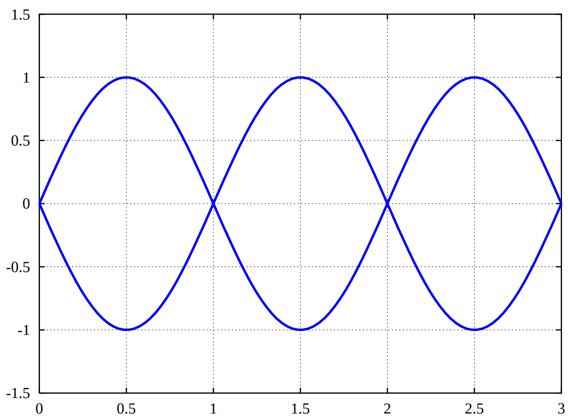

Abbildung 7: Einhüllende einer Saitenschwingung mit $l = 3$ m und $n = 3$.

In einer Schallwelle sind Auslenkung und Druck um $\pi/2$ phasenverschoben. Daher sind Orte mit Druckknoten Orte mit Schwingungsbäuchen und umgekehrt.

Das Bild der Schwingung eines ausgedehnten System entspricht dem einer stehenden Welle mit einer zusätzlichen Randbedingung am 2. Ende. Die möglichen Schwingungsmoden können daher aus der Überlagerung von Wellen bestimmt werden. Dies ist nicht nur in einer Dimension gültig. Auch die Schwingungen von Platten und dreidimensionalen Körpern lassen sich durch Überlagerung von Wellen berechnen. Schwingungen ausgedehnter Systeme können durch äußere Kräfte angeregt werden. Musikinstrumente bieten vielfältige Beispiele der auftretenden Resonanzeffekte. Die immer vorhandene Dämpfung verhindert ein Anwachsen der Amplitude ins Unendliche. Als Folge der Dämpfung ist die Resonanzfrequenz nicht mehr scharf, die Resonanzbedingungen (76) und (78) sind nicht mehr streng erfüllt. Für lineare Wellen gilt bei kleiner Dämpfung angenähert

$$\Delta\lambda =\sim \delta, \tag{79}$$

wobei aber die Bestimmung der Dämpfungskonstanten δ nicht so einfach ist.