2.6 Elastische Wellen

Wellen auf gespannten Saiten Auf einer mit der Kraft F gespannten Saite (oder einem Seil) können sich transversale Wellen ausbreiten. Für die Phasengeschwindigkeit gilt

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} \ , \tag{55}$$

wobei A der Querschnitt der Saite und ϱ die Massendichte des Saitenmaterials ist ($\varrho = m/V$, Einheit kg m^{-3}).

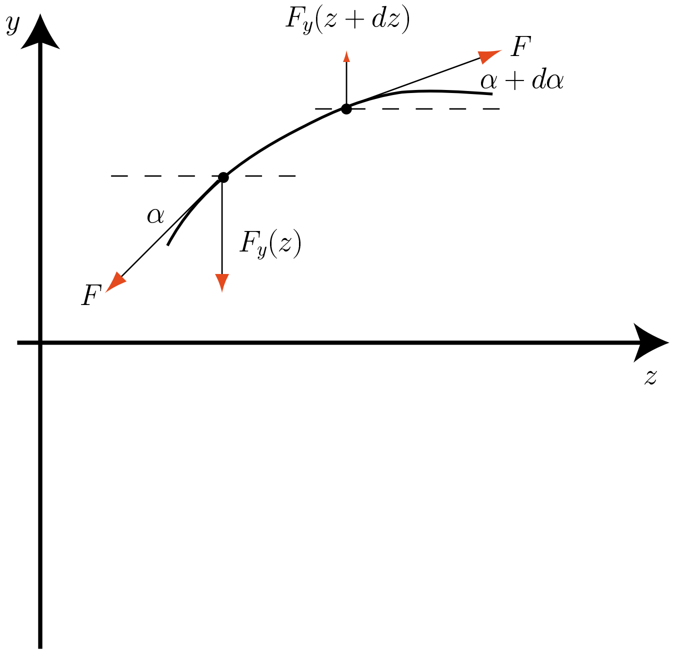

Abbildung 5: Kräfte auf ein Element einer ausgelenkten gespannten Saite.

Herleitung (Abb. 5): Die gesamte rücktreibende Kraft auf ein Element der ausgelenkten Saite ist $F_y(z) + F_y(z+dz)$. Mit $F_y(z+dz) = F\sin(\alpha + d\alpha)$ und $F_y(z) = -F\sin(\alpha)$ folgt für kleine Winkel als resultierende Kraft $\bar{F}_y = F d\alpha$. Ebenso ist dann α durch die Steigung der Kurve gegeben. Mit

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial z} \tag{56}$$

folgt

$$d\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \ , \tag{57}$$

also

$$\bar{F}_y = F\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}dz \quad . \tag{58}$$

Nach Newton gilt aber auch

$$\bar{F}_y = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A\varrho dz\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \tag{59}$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\bar{F}_y$ und Vergleich mit (34) gibt die Behauptung.

Schallwellen Schallwellen sind longitudinale Wellen in festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen. Die Berechnung von c erfolgt ganz ähnlich wie im letzten Abschnitt. Im Ergebnis wird F/A durch einen Elastizitätsmodul oder Druck ersetzt.

a) Stäbe

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{60}$$

E ist der Elastizitätsmodul (Einheit 1 N m^{-2}) des Materials.

b) Flüssigkeiten

$$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \tag{61}$$

K ist der Kompressionsmodul (Einheit 1 N m^{-2}).

c) Gase

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}} \tag{62}$$

p ist der Druck (Einheit 1 Pascal = 1 N m^{-2}, 1 bar = 10^5 Pa) $\kappa = 1.4$ für zweiatomige Gase.

In einer Schallwelle schwankt der Druck periodisch. Die Amplitude der Druckdifferenz Δp zum Umgebungsdruck sei p_0. Die Intensität hängt mit dieser Amplitude über

$$I = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\varrho c} \tag{63}$$

zusammen, da

$$p_0 = A_0\varrho\omega c \tag{64}$$

aus der Kraftgleichung abgeleitet werden kann.

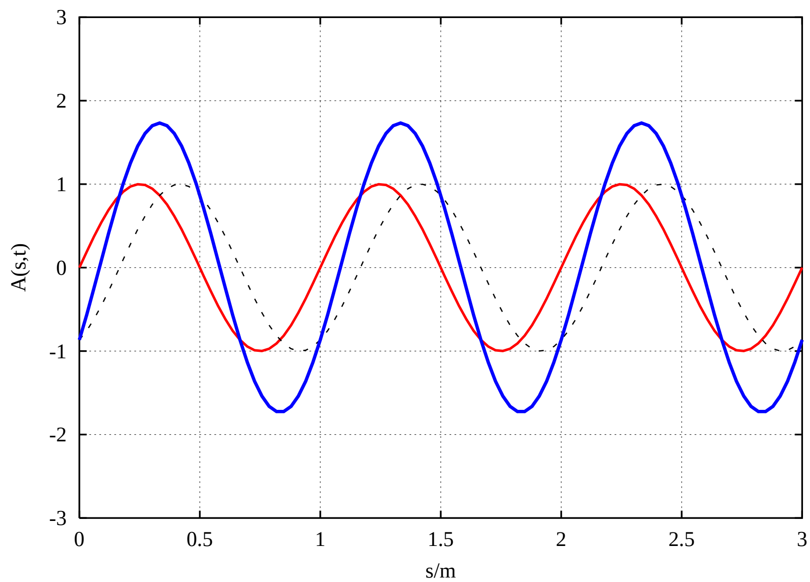

Abbildung 6: Überlagerung zweier Wellen mit $\lambda = 1$ m, $\Delta\Phi = 60°$

2.7 Überlagerung von Wellen, Interferenz

2.7.1 Zwei lineare Wellen

Betrachte zwei rechtslaufende Wellen gleicher Amplitude und Frequenz, aber mit einem Phasenunterschied $\Delta\Phi$. Mit $\Phi = \omega t - ks$ folgt

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 \sin\Phi \\ A_2 &= A_0 \sin(\Phi + \Delta\Phi) \end{aligned} \tag{65}$$

Für die resultierende Welle machen wir den Ansatz

$$A_{\text{res}} = A^* \sin(\omega t - ks + \psi) \ , \tag{66}$$

woraus sich mit Hilfe von (24) unmittelbar

$$A^* = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \tag{67}$$

und

$$\psi = \frac{\Delta\Phi}{2} \tag{68}$$

ergibt. Die Intensität I einer Welle ist $\sim A_0^2$ bzw. $\sim A^{*2}$, also gilt

$$I = 2I_0(1 + \cos\Delta\Phi) \ . \tag{69}$$

Sonderfälle a) vollständige Auslöschung, $A^* = 0, I = 0$ für $\Delta\Phi = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$
b) maximale Verstärkung $A^* = 2A_0$, $I = 4I_0$, für $\Delta\Phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$