

## 2.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Die Orte konstanter Phase (z.B. Wellenberge) breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit (Einheit m/s)

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (40)$$

im Raum aus. Die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen ist die Lichtgeschwindigkeit. Im Vakuum gilt  $c_0 = 2.998 \cdot 10^8$  m/s.

Unter Benutzung der Phasengeschwindigkeit lautet die Darstellung einer nach rechts entlang der  $z$ -Achse laufenden ebenen Welle

$$A = A_0 \sin k(ct - z) \quad (41)$$

Diese genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (42)$$

Elektromagnetische Wellen in Materie zeigen Dispersion, d.h. das Verhältnis  $\omega/k$  ist nicht konstant und damit ist auch die Phasengeschwindigkeit eine Funktion von  $k$ , wenn  $k$  als unabhängige Variable aufgefaßt wird,

$$c = \frac{\omega(k)}{k} \quad (43)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (44)$$

und ist daher von  $c$  verschieden. Mit  $\omega = ck$  gilt die wichtige Umformung

$$v_g = c + k \frac{dc}{dk} \quad (45)$$

Man kann zeigen, daß Signale (also Wellengruppen) sich mit  $v_g$  ausbreiten. (6. Vorlesung)

## 2.4 Energietransport in Wellen

In Wellen wird Energie transportiert. Durch eine Fläche  $A$  (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle) trete im Mittel die Energie  $\overline{\Delta W}$  in der Zeit  $\Delta t$  durch. Es gilt die Definition der Intensität (Einheit  $1\text{W}/\text{m}^2 = 1\text{ J m}^{-2}\text{s}^{-1}$ )

$$I = \frac{1}{A} \frac{\overline{\Delta W}}{\Delta t} \quad (46)$$

Für die Intensität ebener elastischer Wellen gilt ( $v_g = c$ )

$$I = wc \quad , \quad (47)$$

wobei die Energiedichte bzw. mittlere Energiedichte  $w = \bar{w} = \Delta W/V$  durch

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_0^2 \quad (48)$$

gegeben ist.

Aus der Energieerhaltung folgt, daß (ohne Absorption) die Intensität einer ebenen Welle entlang der Ausbreitungsrichtung konstant ist. Für Kreiswellen auf Oberflächen gilt

$$\frac{I(r_2)}{I(r_1)} = \frac{r_1}{r_2} \quad (49)$$

und für Kugelwellen im Raum

$$\frac{I(r_2)}{I(r_1)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad . \quad (50)$$

Die Energiedichte ebener elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist durch  $\varepsilon_0 E^2$  gegeben, für die Intensität folgt nach der zeitlichen Mittelung

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 E_0^2 \quad , \quad (51)$$

wobei die elektrische Feldkonstante  $\varepsilon_0$  den Wert  $8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As}/(\text{Vm})$  hat.

## 2.5 Der Dopplereffekt

Die gemessene Frequenz von Schallwellen hängt von der Relativbewegung von Sender und Empfänger ab.

a) Quelle fest, Empfänger (Beobachter) bewegt mit Geschwindigkeit  $u$

$$f = f_0 \left( 1 \pm \frac{u}{c} \right) \quad (52)$$

Das Pluszeichen gilt bei Annäherung.

b) Quelle bewegt mit Geschwindigkeit  $u$ , Beobachter fest

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{u}{c}} \quad (53)$$

Das Minus-Zeichen gilt bei Annäherung. Bei kleinen  $u$  ist die Näherung

$$f = f_0 \left( 1 \pm \frac{u}{c} \right) \quad (54)$$

erfüllt. Das Plus-Zeichen gilt hier also ebenso bei Annäherung.

Die letzte Formel ist näherungsweise auch für elektromagnetische Wellen gültig, sowohl für bewegte Quelle als auch für bewegten Beobachter. Die Herleitung ist aber ganz anders, da die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bezugssystem ist (spezielle Relativitätstheorie).