1.4 Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen treten sehr häufig auf. Hier Beschränkung auf äußere harmonische Kräfte, $F = F_0 \cos(\omega t)$. Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - Ds + F_0 \cos(\omega t) \ , \tag{27}$$

also

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \ . \tag{28}$$

Ansatz für große t :

$$s = A_0 \cos(\omega t + \psi) \ , \tag{29}$$

wobei A_0 und ψ jetzt Funktionen von ω sind.
Lösung:

$$A_0(\omega) = \frac{F_0}{m} f_R(\omega) = A_0(0)\omega_0^2 f_R(\omega) \tag{30}$$

mit

$$f_R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \tag{31}$$

und

$$\tan\psi(\omega) = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \ . \tag{32}$$

Der Wert dieser Funktionen bei $\omega = \omega_0$ beschreibt den Resonanzfall. An dieser Stelle liegt (nicht ganz genau) das Maximum der Amplitude und die Phasenverschiebung zwischen Ausschlag und Kraft ist $-\pi/2$. Infolge der Reibungsverluste muß dem System Energie zugeführt werden. Mit $\Delta W_d = \int F_d ds = \int F_d \dot{s} dt$ folgt nach Integration von t bis $t + T$ für die Leistung $P = \Delta W / \Delta t$ (Einheit Watt)

$$P = \frac{bF_0^2\omega^2}{2m^2} f_R^2(\omega) \tag{33}$$

Diese Kurve ist symmetrischer als $A_0(\omega)$ und hat das Maximum bei $\omega = \omega_0$, die Halbwertsbreite beträgt 2δ.

Zur Charakterisierung eines schwingungsfähigen Systems wird daher oft die Güte Q_0

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{34}$$

herangezogen. Eine andere anschauliche Bedeutung gewinnt die Güte durch die Benutzung von (30),

$$Q_0 = \frac{A_0(\omega_0)}{A_0(0)} \ , \tag{35}$$

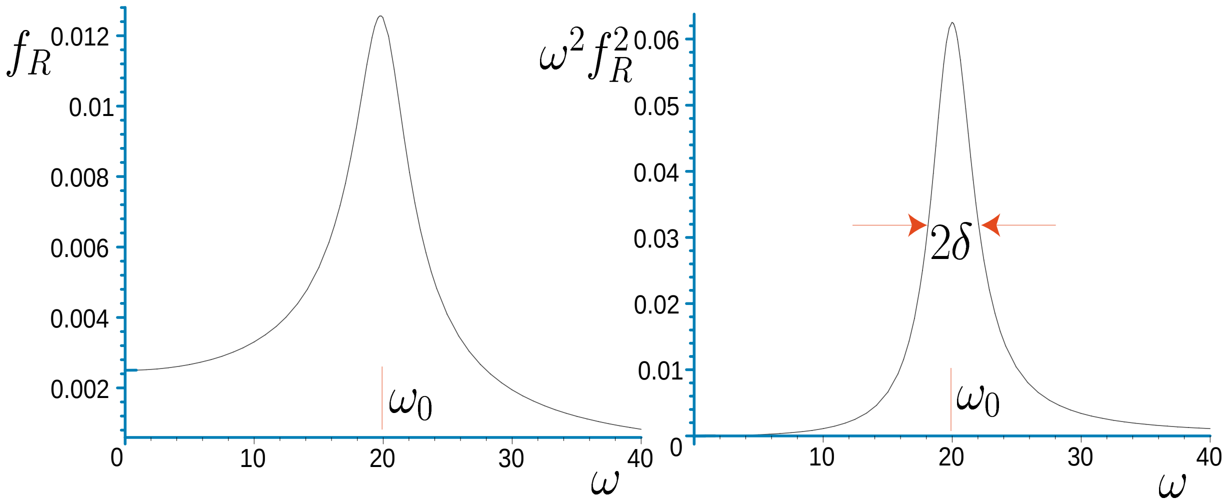

Abbildung 3: Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Leistung bei erzwungenen Schwingungen, $\omega_0 = 20/\mathrm{s}$, $\delta = 2/\mathrm{s}$

es ist also die Verstärkung der Amplitude im Resonanzfall.

Die Funktion $\omega^2 f_R^2(\omega)$ beschreibt das Frequenzspektrum der vom System aufgenommenen (bzw. in Wärme verwandelten) Leistung bei der erzwungenen Schwingung. Auch die Energie der freien gedämpften Schwingung kann nach Frequenzen zerlegt werden. Die in der Vorlesung nicht durchgeführte Fourier-Analyse von (21) zeigt, daß die gedämpfte Schwingung ein Frequenzspektrum proportional zu

$$f_d(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} \tag{36}$$

hat. Auch diese Funktion hat das Maximum bei ω_0 und die Halbwertsbreite 2δ.

2 Wellen

2.1 Wellen in elastischen Medien

Eine mechanische Welle ist ein Vorgang, bei dem sich eine Schwingung vom Ort ihrer Erregung infolge von Kopplungen an benachbarte schwingungsfähige System ausbreitet. Eine Anordnung gekoppelter Pendel kann als Modell einer Welle dienen.

2.2 Mathematische Beschreibung einer Welle

Am einfachsten wird die sinusförmige (nach rechts laufende) ebene Welle betrachtet:

$$A(s,t) = A_0 \sin(\omega t - ks) \tag{37}$$

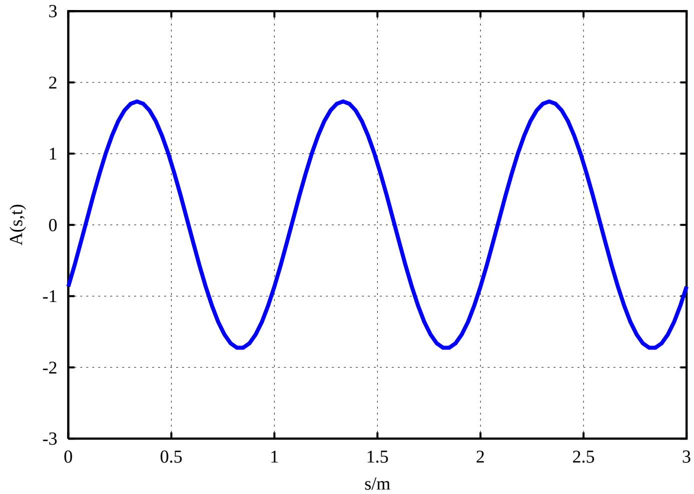

Abbildung 4: Momentaufnahme einer Welle, $\lambda = 1$ m

A ist die Auslenkung als Funktion einer Wegkoordinate s und der Zeit t.
A_0 = Amplitude
$\omega = 2\pi f$
$k = 2\pi/\lambda$ ist die Wellenzahl (Einheit m^{-1}), wobei λ die Wellenlänge ist (Einheit m).
Das Argument $\psi = \omega t - ks$ der Sinusfunktion ist die Phase. (37) beschreibt eine ebene Welle, da die Orte konstanter Phase auf einer Ebene senkrecht zu s liegen. Wellen mit Schwingungsrichtung parallel zu s sind longitudinale Wellen. Wellen mit Schwingungsrichtung senkrecht zu s sind transversale Wellen. Alle Definitionen gelten sinngemäß auch für nichtmechanische Wellen, nur hat dann A eine andere Bedeutung. Beispiel: elektromagnetische Welle entlang der z-Achse: Elektromagnetische Wellen sind transversal, also z.B. $A = E_y$, d.i. Komponente des elektrischen Feldes (gemessen in V/m) in y-Richtung.

$$E_y = E_0 \sin(\omega t - kz) \tag{38}$$

Eine solche Welle übt auf eine Ladung q (gemessen in Coulomb mit 1C= 1As) eine Kraft $F_y = qE_y$ aus.

Bei ebenen Wellen hängt die Amplitude nicht von der Wegkoordinate ab $A(s) = \text{const}$, bei Kugelwellen gilt mit $s = r$

$$\frac{A(r_1)}{A(r_2)} = \frac{r_2}{r_1} \quad . \tag{39}$$

Damit bleibt die Energie erhalten.