1.2 Gedämpfte Schwingungen

Die immer vorhandene Dämpfung kann in vielen Fällen durch eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit beschrieben werden.

$$F_d = -b\dot{s} \tag{16}$$

$b =$ Dämpfungskonstante, Einheit kg/s. Damit gilt die Dgl.:

$$\ddot{s} + \frac{b}{m}\dot{s} + \frac{D}{m}s = 0 \ . \tag{17}$$

Lösung:

$$s = A_0 \exp(-\delta t)\sin(\omega_d t + \psi_0) \tag{18}$$

mit der Abklingkonstanten δ (Einheit s^{-1})

$$\delta = \frac{b}{2m} \tag{19}$$

und der Kreisfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{20}$$

($\omega_0 > \delta$).

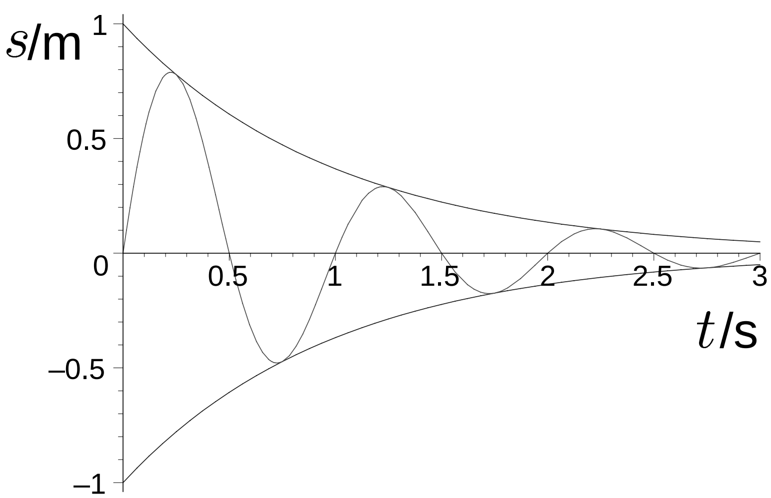

Abbildung 2: Gedämpfte Schwingung mit der einhüllenden Kurve, $A_0 = 1$ m, $\delta = 1/\mathrm{s}$, $T = 1$ s, $\psi_0 = 0$

Die Energie $W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}$ des ungedämpften Oszillators ist $\sim A_0^2$. Bei kleiner Dämpfung bleibt sie daher während einer Periode praktisch konstant und nimmt über lange Zeiten gemäß

$$W = W(0)\exp(-2\delta t) = W(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{21}$$

ab, worin $\tau = 1/(2\delta)$ die Relaxationszeit ist. Diese Abnahme widerspricht nicht dem Energiesatz, da zur Energiebilanz nun auch die durch die Reibung erzeugte Wärmeenergie ΔQ gehört,

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} + \Delta Q = \text{const} \;. \tag{22}$$

1.3 Überlagerung von Schwingungen

Einfachster Fall, Schwebung:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 \sin\omega_1 t \\ s_2 &= s_0 \sin\omega_2 t \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Hilfe des allgemeinen Additionstheorems (nachrechnen!)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{24}$$

folgt

$$s = 2s_0\cos\frac{\Delta\omega\, t}{2}\sin\bar{\omega}t \tag{25}$$

mit $\bar{\omega} = (\omega_1+\omega_2)/2$ und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Besonders anschaulich wird das Ergebnis beim Schall. Für die Empfindung des Hörens ist s^2 verantwortlich. Das Ohr mittelt über die schnellen Schwankungen des Faktors $\sin^2\bar{\omega}t$ und hört somit einen Ton fester Kreisfrequenz $\bar{\omega}$, dessen Lautstärke $\sim \cos^2\Delta\omega\, t/2$ schwankt. Daher ist die Kreisfrequenz dieser Schwebung durch $\Delta\omega$ gegeben.

Jede periodische Schwingung läßt sich als Summe von harmonischen Schwingungen darstellen, d.i. die sog. Fourier-Zerlegung. Als einfachstes Beispiel wird eine Rechteckschwingung der Periode T und der Amplitude A_0 betrachtet. Für $t = 0$ sei $s = A_0$. Dann gilt

$$s = \frac{4A_0}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\ldots}\frac{1}{k}\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right) \;. \tag{26}$$

Es ist sehr instruktiv, dies z.B. mit MAPLE nachzurechnen.