1 Schwingungslehre

1.1 Freie harmonische Schwingungen

Schwingungen treten sehr häufig auf, z.B. Pendel, schwingende Ströme. Wir studieren hier mechanische Schwingungen. Sie sind gekennzeichnet durch einen periodischen Verlauf der Bewegung. Am einfachsten sind die harmonischen Schwingungen. Sie haben die Darstellung

$$s = s_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{1}$$

Hierin bedeuten:

Symbol	Bedeutung	Einheit
s	Auslenkung	m (Meter)
t	Zeit	s (hier Sekunde)
ω_0	Kreisfrequenz	s^{-1} 1Hz=1s^{-1}
s_0	Anfangsauslenkung	m
v_0	Anfangsgeschwindigkeit	m/s

Der Index 0 an ω deutet darauf hin, daß es sich hier um eine charakteristische Kreisfrequenz, die Eigenkreisfrequenz handelt. Allgemein gelten die Definitionen der Frequenz f

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2}$$

und Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{f} \tag{3}$$

Eine andere Darstellung der harmonischen Schwingung ist

$$s = A_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0) \tag{4}$$

mit der Anfangsphase ψ_0 und der Amplitude A_0. Beide Darstellungen sind über

$$A_0 = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \tag{5}$$

und

$$\tan \psi_0 = \frac{s_0 \omega_0}{v_0} \tag{6}$$

miteinander verknüpft.

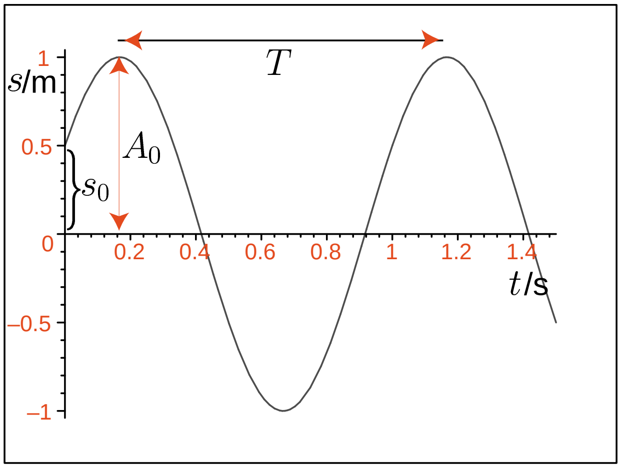

Abbildung 1: Darstellung einer harmonischen Schwingung mit $T = 1$ s, $A_0 = 1$ m und $\psi_0 = 30°$.

Harmonische Schwingen kommen aufgrund linearer rücktreibender Kräfte zustande. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt dann der Zusammenhang $F = ma$ zwischen der Kraft F, der Masse m und der Beschleunigung a, also

$$m\ddot{s} = -ks \quad . \tag{7}$$

Durch Einsetzen von (1) oder (4) kann dies verifiziert werden und ω_0 bestimmt werden,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{8}$$

Beispiele:

1. Federpendel:, Schwingung z.B. entlang der y-Achse um die Ruhelage im Ursprung des Koordinatensystems, $s = y$ und $F = -Dy$ mit der Federkonstanten D (Einheit N/m). Die Federkonstante kann z.B. durch Anhängen eines Gewichtes an eine Feder gemessen werden. Diese dehnt sich dabei um Δl aus und es gilt $mg = D\Delta l$. Die Bewegungsgleichung gibt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad . \tag{9}$$

Zu jedem Zeitpunkt hat die schwingende Masse eine potentielle Energie $W_{\rm pot} = \frac{1}{2}Ds^2$ und eine kinetische Energie $W_{\rm kin} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$

2. Fadenpendel: Länge l, Fallbeschleunigung g, kleine Auslenkungen $s = l\varphi$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{10}$$

Potentielle Energie $W_{\rm pot} = \frac{1}{2}mgl\varphi^2$, kinetische Energie $W_{\rm kin} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$

Erläuterung zur Energie: Die Arbeit ist als

$$W = \int \boldsymbol{F} d\boldsymbol{s} \tag{11}$$

definiert. Durch Arbeit gibt es Änderungen einzelner Arten der Energie. Das Integral der linken Seite von (7) ergibt die Änderung der kinetischen Energie

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \tag{12}$$

und das Integral der rechten Seite die Änderung der potentiellen Energie

$$W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} k s^2 \quad . \tag{13}$$

Auch für Schwingungen gilt der Energiesatz $\Delta W = 0$ oder

$$W_{\mathrm{kin}} + W_{\mathrm{pot}} = \mathrm{const.} \tag{14}$$

Beachte: Einheit der Energie 1Nm = 1Ws =1J

Aus den Formeln für die potentielle und kinetische Energie kann ω_0^2 besonders einfach ermittelt werden. Man benutzt die Methode der Division der Faktoren. Es sei Z eine Koordinate der Auslenkung und $\dot{Z}$ ihre Ableitung. Dann nimmt die kinetische Energie die Form $W_{\mathrm{kin}} = A\dot{Z}^2$ und die potentielle Energie die Form $W_{\mathrm{pot}} = BZ^2$ an. Die Kreisfrequenz der Schwingung wird aus

$$\omega_0^2 = \frac{B}{A} \tag{15}$$

berechnet. Dieses Verfahren ist besonders hilfreich, falls ein kompliziertes Kraftgesetz vorliegt. Sehr häufig gilt dann immer noch, daß bei kleinen Auslenkungen um die Ruhelage die potentielle Energie quadratisch von der Auslenkung abhängt. Mathematisch entspricht dies der Entwicklung (Taylor-Reihe)

$$W_{\mathrm{pot}}(s) = W_{\mathrm{pot}}(s_0) + W'_{\mathrm{pot}}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2} W''_{\mathrm{pot}}(s_0)(s - s_0)^2 + ... \tag{16}$$

mit $W'_{\mathrm{pot}}(s_0) = 0$.